

Pour que la mesure d'une grandeur physique soit exploitable, il est indispensable d'associer à la valeur mesurée une incertitude de mesure qui renseigne sur la précision avec laquelle cette valeur est connue.

Cela permet notamment de :

- déterminer le nombre de chiffres significatifs de la valeur mesurée, et donc la manière d'arrondir le résultat donné par une calculatrice ;
- estimer la cohérence de deux valeurs d'une même grandeur.

1) DEFINITIONS	2
2) DISTRIBUTIONS USUELLES.....	2
2.1 – LA DISTRIBUTION GAUSSIENNE (OU NORMALE).....	2
2.2 – LA DISTRIBUTION RECTANGULAIRE (OU UNIFORME).....	2
3) ESTIMATION DU RESULTAT D'UNE MESURE ET DE SON INCERTITUDE-TYPE.....	3
3.1 – EXPERIENCE AVEC VARIABILITE OBSERVEE (INCERTITUDE DE TYPE A)	3
3.2 – EXPERIENCE SANS VARIABILITE OBSERVEE (INCERTITUDE DE TYPE B)	3
3.3 – INCERTITUDE-TYPE D'UNE DONNEE NUMERIQUE.....	4
4) COMPOSITION DES INCERTITUDES-TYPES	4
4.1 – INCERTITUDES-TYPES COMPOSEES D'UNE SOMME.....	4
4.2 – INCERTITUDES-TYPES COMPOSEES D'UN PRODUIT	4
4.3 – INCERTITUDES-TYPES COMPOSEES QUELCONQUES [VOIR FICHE TP N°3].....	4
5) EXPLOITATION DE RESULTATS MUNIS DE LEURS INCERTITUDES	5
5.1 – CHIFFRES SIGNIFICATIFS - ECRITURE CORRECTE DU RESULTAT D'UNE MESURE	5
5.2 – DEFINITION DE L'ECART NORMALISE (OU z -SCORE).....	5
5.3 – COMMENTAIRES DEVANT ACCOMPAGNER UN RESULTAT	5
5.3.1 – <i>Comparaison de 2 valeurs d'un même mesurande</i>	5
5.3.2 – <i>Cas d'une valeur unique</i>	5
6) RECAPITULATIF : COMMENT PROCEDER EN TP ?	6

1) Définitions

- Le **mesurage** (ou **processus de mesure**) est l'ensemble des opérations expérimentales et mathématiques visant à déterminer la valeur d'une grandeur.
- Le **mesurande** est la grandeur particulière soumise au mesurage, c'est-à-dire la grandeur dont on cherche à mesurer la valeur (longueur, tension, masse...).
- Les grandeurs, autres que le mesurande, qui affectent le résultat du mesurage sont appelées **grandeurs d'influence** ou **paramètres extérieurs**.
- Les **chiffres significatifs** sont les chiffres constituant l'écriture de la valeur d'un mesurande compte tenu de l'évaluation de l'incertitude due au mesurage.

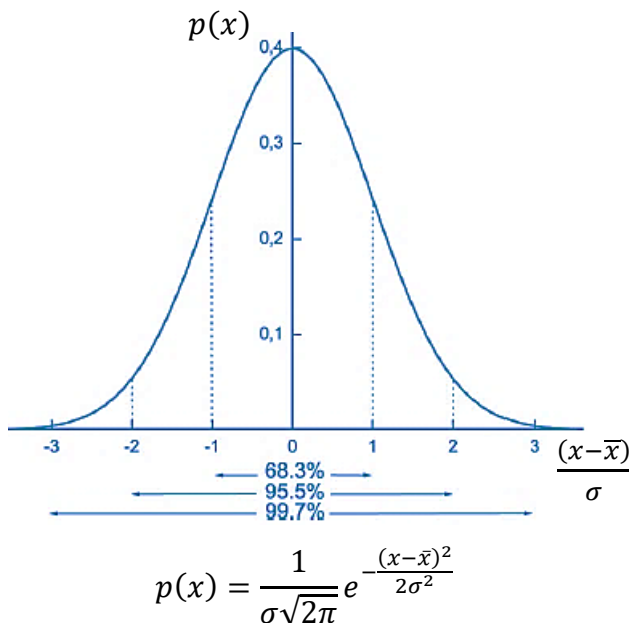
- La quantification de la variabilité des valeurs obtenues lors du mesurage d'une grandeur x est appelée **incertitude-type** et est notée $u(x)$. Par définition, l'incertitude-type correspond à l'**écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure. Sa valeur s'écrit avec **deux chiffres significatifs**.

- On peut définir de plus l'**incertitude-type relative** comme la grandeur $\frac{u(x)}{|x|}$, que l'on exprime généralement en pourcentage.

2) Distributions usuelles

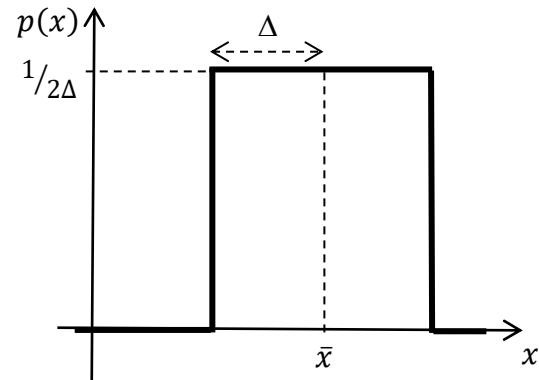
Les mesurages répétés du mesurande x voient les valeurs se répartir le plus souvent selon une des deux lois de probabilités suivantes.

2.1 – La distribution gaussienne (ou normale)



Remarque : 68,3% des valeurs x ne s'écartent pas de plus de σ de leur moyenne $\bar{x}$. Ainsi, l'intervalle de confiance à 68,3% s'écrit : $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$.

2.2 – La distribution rectangulaire (ou uniforme)



$$p(x) = \frac{1}{\Delta} = \text{Cte}$$

Remarque : La donnée de la demi-largeur (ou précision) Δ de la distribution donne accès simplement à l'écart-type de la distribution uniforme : $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$.

Définitions :

Valeur moyenne (ou espérance) de la distribution : $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx$

Variance de la distribution : $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot p(x) \cdot dx$

3) Estimation du résultat d'une mesure et de son incertitude-type

3.1 – Expérience avec variabilité observée (incertitude de type A)

On considère un mesurage répété N fois selon le même protocole, réalisé par le même opérateur. On observe la variabilité des valeurs du mesurande. La distribution de ces valeurs se caractérise par sa moyenne et son écart-type.

Définition : On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des valeurs expérimentales $\{x_i\}$. Le résultat de l'expérience est :

$$\bar{x} \pm u(\bar{x}),$$

où $\bar{x}$ est la **moyenne** des N valeurs, définie par

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

et où l'**incertitude-type sur la moyenne** $u(\bar{x})$ est donnée par

$$u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}},$$

avec $u(x)$ l'**incertitude-type sur une mesure unique** :

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$



3.2 – Expérience sans variabilité observée (incertitude de type B)

Il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure. Dans ce cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type. Le plus souvent, et sauf indication contraire dans la notice d'utilisation d'un instrument de mesure, on considérera que l'estimation de la variabilité de la mesure donne la demi-largeur Δ de la loi de distribution uniforme attachée au mesurage. La quantité Δ est également appelée *précision de mesure*.

Définition : Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\bar{x}$ la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est *certain* de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta]$.

Dans ce cas, le résultat de la mesure est :

$$\bar{x} \pm u(x),$$

avec

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}.$$



Exemple : Un étudiant projette l'image d'un objet sur un écran à l'aide d'une lentille convergente. En déplaçant la lentille sur le banc d'optique, l'image qu'il perçoit est nette lorsque l'abscisse x de la lentille est comprise entre $x_1 = 30,0$ cm et $x_2 = 30,5$ cm (origine arbitraire). Il en déduit que l'abscisse pour laquelle l'image est nette est :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}},$$

soit $x = 30,25 \pm 0,14$ cm, en l'absence d'autres sources d'incertitudes.

Remarque : Lorsqu'un mesurande présente plusieurs sources d'incertitudes identifiées, l'incertitude-type est obtenue par la loi de composition des incertitudes-types.

Exemple : L'abscisse x d'une lentille de projection sur un banc d'optique est soumise à l'incertitude-type sur la graduation du banc u_1 et à l'incertitude-type due à l'estimation de la netteté de l'image produite sur l'écran u_2 . Ainsi, l'incertitude-type sur x est donnée par $u(x) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

A.N. : Si $u_1 = 0,29$ mm (graduation au millimètre) et $u_2 = 1,4$ mm, alors $u(x) = 1,4$ mm. L'incertitude-type sur la graduation est ici négligeable devant celle liée à l'estimation de la netteté de l'image.

3.3 – Incertitude-type d'une donnée numérique

L'obtention d'une grandeur de sortie nécessite souvent l'utilisation de données numériques et pas seulement de mesurandes.

Convention : On attribue à une donnée numérique, dont l'incertitude n'est pas explicitement indiquée, une incertitude-type valant une demi-unité du dernier chiffre, divisée par $\sqrt{3}$.



Exemple : Dans un manuel, on trouve que la valeur de la viscosité dynamique du glycérol vaut $\eta = 1,49$ Pa. s, à 20 °C. L'incertitude-type associée à cette valeur tabulée s'écrit : $u(\eta) = \frac{0,005}{\sqrt{3}} = 0,0029$ Pa. s. La valeur fournie par le manuel s'interprète alors comme : $\eta = 1,4900 \pm 0,0029$ Pa. s.

4) Composition des incertitudes-types

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut alors combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité.

4.1 – Incertitudes-types composées d'une somme

Définition : Supposons que l'on souhaite calculer

$$y(x_1, x_2) = \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2.$$

L'incertitude-type de y est alors donnée par :

$$u(y) = \sqrt{(\alpha \cdot u(x_1))^2 + (\beta \cdot u(x_2))^2}.$$



4.2 – Incertitudes-types composées d'un produit

Définition : Supposons que l'on souhaite calculer

$$y(x_1, x_2) = a \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta.$$

L'incertitude-type relative de y est alors donnée par :

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\left(\alpha \cdot \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \cdot \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}.$$



4.3 – Incertitudes-types composées quelconques [voir fiche TP n°3]

Seules les deux formules précédentes sont à connaître. Pour tous les autres cas, on procèdera comme suit :

- Estimer expérimentalement les incertitudes-types $u(x_i)$;
- Procéder à une simulation de la variabilité aléatoire des x_i et de y à l'aide d'une simulation informatique Monte-Carlo (à l'aide d'un script Python ou du tableur EXCEL) ;
- En déduire l'écart-type de la distribution des valeurs de y qui est par définition $u(y)$.

5) Exploitation de résultats munis de leurs incertitudes

5.1 – Chiffres significatifs - Ecriture correcte du résultat d'une mesure

Définition : Ne doivent figurer dans le résultat final que des chiffres significatifs. Ce sont les chiffres dont le poids est supérieur ou égal aux poids des 2 chiffres figurant dans l'incertitude-type (hormis les zéros de gauche).



Exemple : La masse d'un corps pur solide en poudre est indiquée par la balance de précision : $\overline{m} = 5,467$ g. L'incertitude-type a été évaluée à $u(\overline{m}) = 0,23$ g. Le résultat s'écrit : $m = 5,47 \pm 0,23$ g (ce qui suit $\pm$ est l'incertitude-type).

5.2 – Définition de l'écart normalisé (ou z-score)

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme **compatibles** ou **incompatibles**.

Définition : L'écart normalisé E_N , ou **z-score**, entre deux mesures y_1 et y_2 , d'incertitudes-types $u(y_1)$ et $u(y_2)$, est donné par :

$$E_N = \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{u(y_1)^2 + u(y_2)^2}}.$$



Remarque : Si l'une des deux valeurs est extraite d'une table de données (valeur de référence), son incertitude-type est généralement négligeable devant l'incertitude expérimentale. L'écart normalisé s'écrit alors :

$$E_N = \frac{|y_{exp} - y_{ref}|}{u(y_{exp})}.$$

5.3 – Commentaires devant accompagner un résultat

5.3.1 – Comparaison de 2 valeurs d'un même mesurande

Convention : Si l'écart normalisé entre les deux valeurs d'un même mesurande est inférieur ou égal à 2, i.e. $E_N \leq 2$, les deux mesures sont dites **compatibles**.



Si $E_N > 2$, les deux mesures sont alors dites *incompatibles*. Ceci est à imputer à une ou plusieurs des causes suivantes :

- L'opérateur n'a pas réalisé le mesurage avec suffisamment de soin (suivi du protocole de mesure, erreur aléatoire de parallaxe de lecture d'un index, mauvais choix de calibre d'un multimètre...).
- L'opérateur n'a pas au préalable réduit au maximum les biais (erreur d'étalonnage, oubli du tarage pour une pesée, erreur systématique de parallaxe de lecture d'un index...).
- L'opérateur a sous-estimé une ou plusieurs incertitudes, ou n'a pas pris en compte une source d'incertitude majeure.
- Le dispositif de mesurage n'est pas adapté au mesurage compte tenu de l'ordre de grandeur (utilisation d'une règle métrique pour mesurer la largeur d'une table...).
- La modélisation envisagée du phénomène observé n'est pas complète.

5.3.2 – Cas d'une valeur unique

En travaux pratiques, nous ne disposerons pas systématiquement d'une deuxième valeur d'un mesurande, qu'elle soit tabulée ou obtenue par une autre méthode de mesurage. Il s'agit comme précédemment de convenir d'un critère permettant de ne pas remettre en cause le processus de mesurage.

Usage en TP : Si l'incertitude-type relative d'une mesure est inférieure ou égale à 5%, le processus de mesurage est jugé **recevable**.

$$\frac{u(y)}{|y|} \leq 5\%$$

6) Récapitulatif : comment procéder en TP ?

