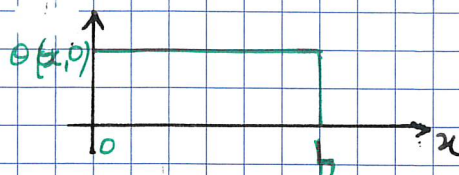


★ TH 316 - Mise en température d'une tige cylindrique

1. Condition initiale : $\theta(x, 0) = T(x, 0) - T_1 = T_0 - T_1 > 0$

Conditions limites.

$$x \quad \theta(0, t) = \theta(h, t) = T_1 - T_1 = 0$$



2.1. Équation de la diffusion en l'absence de terme source :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \text{Injectons la solution}$$

$$\theta(x, t) = f(t) \cdot g(x)$$

$$f'g = Dfg'' \quad \div f'g \rightarrow \frac{f'}{f} = D \frac{g''}{g}$$

x et t étant des variables indépendantes, ces rapports sont égaux à une même constante

$$\text{soit } D \frac{g''}{g} = cte \rightarrow \frac{g''}{g} = \frac{cte}{D} = -K \rightarrow \underline{g'' + Kg = 0} \quad K = k^2$$

2.2. Les conditions limites sur $\theta(x, t)$ imposent $g(0) = g(h) = 0$.

Seule une solution harmonique non identiquement nulle permet de vérifier les conditions limites $\Rightarrow \underline{K > 0}$

$$g(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad ; \quad g(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$g(h) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad \text{non retenue}$$

$$\text{ou } \sin(kh) = 0$$

$$\rightarrow kh = n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \underline{k_n = \frac{n\pi}{h}}$$

$$2.3. \quad \frac{f'}{f} = cte = -KD \rightarrow f' + KDf = 0 \rightarrow f' + \frac{n^2\pi^2 D}{h^2} f = 0$$

$$\text{d'où } f_n(t) = C_n e^{-t/\tau_n} \quad \text{où } \underline{\tau_n = \frac{h^2}{n^2\pi^2 D}}$$

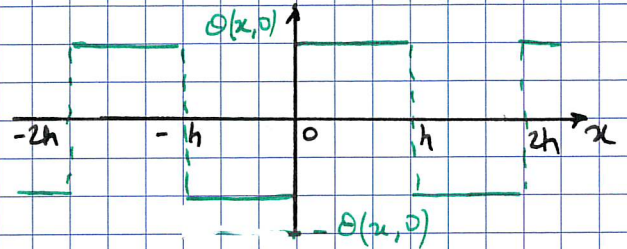
2.4. L'équation de la chaleur étant linéaire, une somme infinie des solutions pour $n \in \mathbb{N}$ est encore solution.

$$\underline{\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-t/\tau_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{h}\right)}$$

3. $\theta(x, 0) = \sum_1^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{h}$ est la série de Fourier d'une fonction $F(x)$ $2h$ -périodique impaire. Afin que $\theta(x, 0)$ vérifie la condition initiale, $F(x)$ doit coïncider avec la fonction $T_1 - T_0$ pour $x \in [0, h]$.

d'où

$$\theta(x, t) = \sum_{n \text{ impair}} \frac{4 \theta(x, 0)}{\pi n} e^{-t/\tau_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{h}\right)$$



$$4. \quad \frac{\theta_n}{\theta_1} = \frac{1}{n} e^{-(n^2-1)t/\tau_1} \frac{\sin(n\pi x/h)}{\sin(\pi x/h)}$$

$$\left| \frac{\theta_n}{\theta_1} \right| < 1\% \Rightarrow t > \frac{5}{n^2-1} \tau_1$$

On se gardera donc que le 1^{er} terme de la série si $\left| \frac{\theta_3}{\theta_1} \right| < 1\%$.

$$\rightarrow n=3 \rightarrow t > \frac{5}{8} \tau_1 = t_1$$

$$\text{A.N.: } t_1 = 1,3 \cdot 10^3 \text{ s}$$

