Fénelon Sainte-Marie
La Plaine Monceau
GROUPE SCOLAIRE

Physique

TRAVAUX DIRIGES n°5

*PC/PC**

2024-2025

Thème : Ondes mécaniques

Mardi 24 septembre 2024

Ondes transversales sur une corde

PO104 – Régime sinusoïdal forcé

On soumet l'extrémité d'une corde horizontale à une vibration transversale $\xi(t) = 0{,}10.\sin(6.t)$ où ξ est en mètres et t en secondes. La tension de la corde est $T = 4\ N$ et sa masse linéique $\mu = 10\ g.m^{-1}$.

1 – Quelle est la célérité des ondes dans la corde ?

2 – Quelle est la fréquence et la longueur d'onde de l'onde ?

3 – Quelle est l'expression en fonction de t du déplacement transversal du point de la corde à l'abscisse $x = 1{,}0\ m$ par rapport à la source ? (on négligera tout phénomène dissipatif)

4 – Tracer l'allure de la corde à l'instant $t = \frac{\pi}{12}$ s.

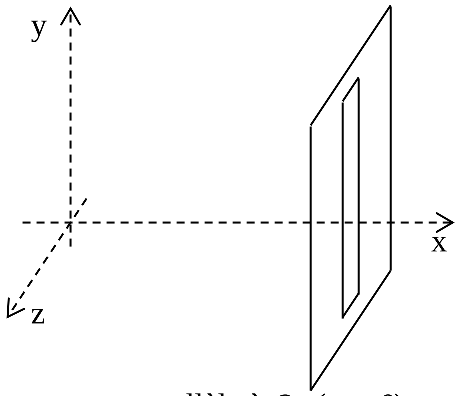
Réponses : 1) c = 20 m.s^{-1} ; 2) λ = 21 m ; 3) $\xi(1,t) = 0{,}10.\sin\left(6\left(t - \frac{1}{c}\right)\right)$;

4) $\xi\left(x, t = \frac{\pi}{12}\right) = 0{,}10.\cos(0{,}3.x)$

PO102 - Corde vibrante - Différentes conditions limites. *(Héloïse / Rim)*

L'extrémité $x = L$ d'une corde est arrimée de la manière suivante : la corde traverse une fente le long de l'axe Oy ; une bille de masse négligeable, fixée à la corde glisse sans frottement juste derrière la fente, son diamètre étant suffisant pour interdire son passage par la fente.

On désigne par T la tension de la corde. On néglige l'action de la pesanteur.



1 – On engendre en $x = 0$ sur la corde une onde pour laquelle le déplacement est parallèle à Oz ($y = 0$).

a – Quelle condition aux limites la fixation de la corde impose-t-elle en $x = L$?

b – Rappeler l'équation de propagation de l'onde sur la corde dans l'approximation des petits déplacements.

c – L'onde incidente est sinusoïdale (pulsation ω, amplitude A). Ecrire l'expression de l'onde résultante qui s'établit sur la corde. De quel type est-elle ? *On utilisera avantageusement la notation complexe*

2 - On engendre en $x = 0$ sur la corde une onde pour laquelle le déplacement est parallèle à Oy ($z = 0$).

a – Quelle est la force verticale exercée par la corde sur la bille ? Que vaut la force verticale qu'exerce le support de la fente sur la corde ? Quelle condition aux limites la fixation de la corde impose-t-elle en $x = L$?

b – L'onde incidente est sinusoïdale (pulsation ω, amplitude A). Ecrire l'expression de l'onde résultante qui s'établit sur la corde. De quel type est-elle ? *On utilisera avantageusement la notation complexe*

PO106 – Corde suspendue *(Zoé)*

Une corde de longueur L et de masse M pend librement au plafond.

1 – Justifier que la vitesse d'une onde transversale en fonction de la position le long de la corde est $c = \sqrt{g.x}$ où x est la distance par rapport à l'extrémité libre.

2 – Montrer qu'un pulse transversal met un temps $\tau = 2.\sqrt{\frac{L}{g}}$ pour parcourir la corde.

PO108 – Influence de la raideur d'une corde sur ses modes propres *(Yannis / Rachel)*

On envisage une petite déformation transversale *y(x,t)* sur une corde vibrante de longueur *L*, de masse linéique μ avec une tension *T*. La corde n'étant pas parfaitement souple, la force exercée en un point d'abscisse *x* par la partie située au-delà de *x* sur la partie en deçà de *x* est de la forme : $\vec{F} = \vec{T} - \gamma.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.\vec{u_y}$

1 – Chercher par analyse dimensionnelle une expression de la constant positive γ sous la forme d'un monôme $\gamma = Y^p.r^q$ en fonction du module d'Young *Y* et du rayon *r* de la corde.

2 – Etablir l'équation d'onde dont *y(x,t)* est solution.

3 – La corde est fixée à ses extrémités. On cherche des modes propres de la forme :

$$y_n(x,t) = C_n.sin\left(\frac{n.\pi.x}{L}\right).cos(\omega_n.t)$$

Déterminer les pulsations propres ω_n. Commenter.

☆ **PO1008 – Corde avec frottement fluide** *(Guillaume)*

On considère une corde souple, inélastique, de masse linéique $\mu = 10\ g.m^{-1}$, de tension $T_0 = 100\ N$ susceptible d'effectuer de petits mouvements transverses. L'élément de corde entre les abscisses *x* et *x + dx* est soumis à la force de frottement visqueux dans l'air ambiant, de la forme $\overrightarrow{dF} = -h.\vec{v}.dx$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'élément de corde selon *Oy*.

1 – On considère une corde de guitare de diamètre $D = 1{,}0\ mm$, émettant une note de fréquence $f = 100\ Hz$. L'amplitude de sa vibration est $a = 1{,}0\ mm$. On donne de plus la viscosité de l'air $\eta = 2{,}0.10^{-5}\ Pa.s$. Calculer le nombre de Reynolds associé au mouvement de la corde dans l'air. Commenter la validité de la force de frottement proposée.

2 – Etablir l'équation de propagation de l'onde sur la corde (on négligera la pesanteur).

3 – On étudie le cas d'une onde progressive plane harmonique $\underline{y}(x,t) = a.e^{i.(\omega.t-\underline{k}.x)}$. Déterminer la relation de dispersion $\underline{k} = f(\omega)$.

4 – On pose $\underline{k} = k_1 + i.k_2$ et on suppose $h << \mu.\omega$. Donner une expression approchée de $\underline{k}$.

5 – Le milieu est-il dispersif ? absorbant ? Ecrire *y(x,t)*.

6 – Quelle est la puissance moyenne perdue par unité de longueur de corde ?

☆ **PO1006 - Corde de piano** *(Benjamin)*

A l'origine des dates, une corde de piano de masse linéique μ et de longueur *L*, tendue le long de l'axe horizontal *(Ox)* est frappée par un petit marteau de largeur *e << L* entre les abscisses *a* et *a + e*. Ce coup de marteau communique aux points frappés une vitesse *u* transversale à partir de la position d'équilibre, et une vitesse nulle pour les autres points.

1 – Equation d'onde

Donner l'équation de propagation que satisfont les petites élongations transversales *z(x,t)* le long de la corde.

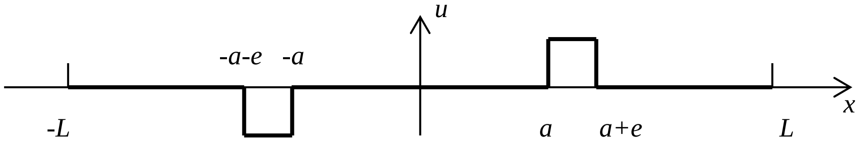
2 – Solution générale – Conditions limites

Cette dernière se trouvant fixée à ses deux extrémités, quelles sont les solutions de cette équation ?
Ecrire la solution générale pour une onde a priori non harmonique et définir le spectre du mouvement de la corde.

3 – Prise en compte des conditions initiales

Compte tenu des conditions initiales, déterminer les amplitudes des harmoniques présents dans le spectre du mouvement de la corde.

Indication : On donne la série de Fourier de la fonction périodique dont le graphe est ci-dessous



$$f(x) = \sum_n \frac{4.u}{n.\pi}.sin\left(\frac{n.\pi.e}{2.L}\right).sin\left(\frac{n.\pi}{L}\left(a+\frac{e}{2}\right)\right).sin\left(\frac{n.\pi.x}{L}\right)$$

4 – Subsidiaire

a) En admettant que le spectre d'intensité sonore est proportionnel à l'énergie cinétique moyenne de la corde, montrer qu'il est proportionnel à $(n.A_n)^2$.

b) Une corde de piano est toujours frappée au 7ème ($a = L/7$) de manière à supprimer le 6ème harmonique qui n'apparaît pas dans la gamme tempérée , et on prend $e << a$. Représenter graphiquement son spectre énergétique.

Ondes longitudinale dans un solide élastique

PO114 – Onde sonore dans une barre *(Albane)*

Soit une barre métallique de section S, de longueur L et de masse volumique $\rho = 7{,}8.10^3\ kg.m^{-3}$. On étudie la propagation d'ondes sonores dans la barre. Un élément de la barre initialement en x au repos se retrouve en $x + \xi(x,t)$ à l'instant t lors de la propagation. On donne le module d'Young de la barre : $\underline{E = 2\ 10^{10}\ Pa}$

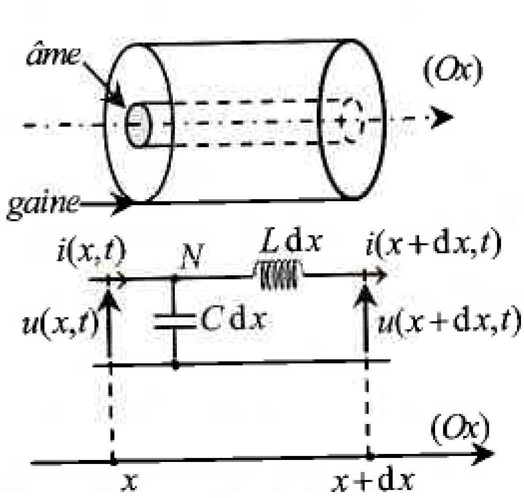
a) Rappeler l'équation de propagation de la perturbation $\xi(x,t)$. En déduire l'expression puis la valeur de la célérité c des ondes. La comparer à la vitesse du son dans l'air.

b) La barre est maintenant fixée en $x = L$. On l'excite en $x = 0$ par $\vec{F} = F_0 cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$ et on recherche des solutions en onde stationnaire de la forme $\xi(x,t) = f(x)sin(\omega t - \varphi)$. Déterminer $\xi(x,t)$.
Quelle est la fréquence du fondamental ? Est-ce audible ?

Onde électrique

PO124 – Câble coaxial sans perte *(Inès)*

Considérons une ligne coaxiale parallèle à l'axe (Ox), considérée sans perte, constituée d'un cylindre de rayon R_1 d'axe (Oz),dit âme, et un cylindre plein dit gaine de rayon $R_2 > R_1$ et d'épaisseur négligée. L'âme sert à amener un courant électrique et le conducteur extérieur en assure le retour. L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique que l'on assimilera au vide pour simplifier. Cette ligne peut se décomposer en cellules élémentaires, de longueur dx. Chaque cellule présente la capacité linéique C et une inductance linéique L. A l'instant t, à l'abscisse x, $i(x,t)$ est le courant circulant dans l'âme du câble et $u(x,t)$ la différence de potentiel entre l'âme et la gaine, le potentiel de la gaine étant pris comme référence.



1a) En appliquant les lois de l'électrocinétique à une cellule élémentaire de longueur dx et en se limitant aux termes d'ordre le plus bas, établir les relations entre dérivées spatiales et temporelles de $i(x,t)$ et $u(x,t)$.
1b) En déduire que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ satisfont à une même équation aux dérivées partielles que l'on nommera. Ecrire la forme générale de la solution. Interpréter sa forme.

2 – La ligne est alimentée en $x = 0$ par un générateur délivrant une tension sinusoïdale de la forme $\underline{u}(t) = u_0.e^{j.\omega.t}$ et fermée en $x = \ell$ sur un dipôle D d'impédance $\underline{Z_D}$. On admet que, de façon générale, une onde progressive qui rencontre une interface entre deux milieux d'impédances différentes, y subit une réflexion.

a) Justifier que l'on peut écrire en notation complexe la tension dans la ligne sous la forme : $\underline{u}(x,t) = \left(A.e^{-j.k.x} + B.^{j.k.x}\right).e^{j.\omega.t}$ où A et B sont des constantes a priori complexes et $k = \frac{\omega}{c}$. A quelle condition cette solution d'ondes planes de longueur d'onde $\lambda = \frac{2.\pi}{k}$ est-elle valable ?

Déterminer la forme de $\underline{i}(x,t)$ en fonction de l'impédance caractéristique $\underline{Z_C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

b) On définit l'impédance de ligne à l'abscisse x, $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$.

En utilisant les conditions aux limites, déterminer A et B puis $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$ en fonction de $\underline{u}(0,t)$, $\underline{Z_C}$, $\underline{Z_D}$, k, ℓ et x.

c) Le transfert de la ligne vers le dipôle D est optimal en l'absence d'onde réfléchie. Pourquoi parle-t-on alors d'adaptation d'impédance ? Donner alors les valeurs de L et de C lorsque D est une résistance $R = 600\ \Omega$. On prendra $c = 3{,}00.10^8\ m.s^{-1}$.
