



Thème : Ondes électromagnétiques dans les milieux linéaires

Mardi 11 mars 2025

PO406 – Transmissions sous-marines (Héloïse / Rim)

On examine ici la faisabilité de transmission sous-marine par ondes radio de fréquence maximale 100 MHz à travers un dioptré air-mer. L'eau de mer est un milieu linéaire, homogène, isotrope et neutre rendu conducteur par sa salinité. Pour les fréquences hertziennes, sa permittivité relative est $\epsilon_r = 81$, sa conductivité $\sigma = 4 \text{ S.m}^{-1}$, sa perméabilité magnétique μ_0 .

Indice complexe et épaisseur de peau

1 – Etablir la relation de dispersion des OPPH dans l'eau de mer, vérifiée par le vecteur d'onde \underline{k} puis par l'indice complexe \underline{n} .

2 – Evaluer les ordres de grandeurs des termes intervenant dans l'expression de \underline{n}^2 puis donner une expression approchée de \underline{n} en fonction de $\alpha = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}$. Commenter cette approximation et le résultat obtenu.

3 – Une OPPH se propage perpendiculairement à l'interface air-mer selon les z croissants. Sur quelle distance δ appelée épaisseur de peau se propage-t-elle avant que son amplitude soit inférieure à e ? Quelle est sa vitesse de phase v_φ ?

Application numérique : Calculer δ et v_φ pour $f = 100 \text{ MHz}$, puis $f = 500 \text{ kHz}$. Comparer δ à λ . Conclure.

Facteur de transmission énergétique

Le dioptré air-mer est horizontal confondu avec le plan (xOy) . L'axe (Oz) est orienté dans le sens des profondeurs z croissantes. L'air a un indice valant 1 . On considère l'OPPH incidente, en incidence normale de champ : $\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{i(\omega t - k_1 z)} \underline{\vec{u}}_x$

Elle engendre un champ réfléchi $\underline{\vec{E}}_r = r E_0 e^{i(\omega t + k_1 z)} \underline{\vec{u}}_x$ et un champ transmis $\underline{\vec{E}}_t = t E_0 e^{i(\omega t - k_2 z)} \underline{\vec{u}}_x$

4 - Calculer les champs magnétiques complexes $\underline{\vec{B}}_i$, $\underline{\vec{B}}_r$ et $\underline{\vec{B}}_t$.

5 – En appliquant la continuité des champs, en déduire les expressions de r et t en fonction de \underline{n} .

6 – En déduire les expressions des facteurs de réflexion R et de transmission T en énergie électromagnétique. Que dire de $R + T$?

7 – Donner l'expression de T à l'aide de l'expression de approchée de \underline{n} de la question 2).

Calculer T pour $f = 100 \text{ MHz}$, puis $f = 500 \text{ kHz}$. Conclusion.

8 – Un signal est émis dans l'air par un navire dans les conditions étudiées ici. Pour les deux fréquences précédentes, déterminer la profondeur limite d à laquelle un sous-marin peut le détecter sachant que son récepteur est sensible à une énergie du signal 10^{10} fois plus faible que celui de l'émetteur.

Que devient cette distance lorsque le signal est émis directement dans l'eau près de la surface ? Commenter.

PO402 - Optique des métaux (Yannis / Rachel)

Les applications numériques seront relatives au cuivre, de masse atomique $M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$ et de masse volumique $\mu = 8,9 \text{ g.cm}^{-3}$. On adopte le modèle de Drude selon lequel chaque atome libère un électron libre de charge $q = -e$ et de masse $m = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$, en mouvement à la vitesse \vec{v} par rapport au réseau cristallin, l'électron est soumis à une force de « frottement » $-h. \vec{v}$. Cette hypothèse revient à introduire un temps de relaxation $\tau = \frac{m}{h}$. La longueur d'onde $\lambda_0 = c\tau = 7,5 \mu\text{m}$ pour le cuivre. On donne $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

1 - En étudiant le mouvement des n électrons par m^3 que contient le métal en régime sinusoïdal forcé sous l'action d'un champ électrique de représentation complexe : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i.\omega.t}$ déterminer la représentation complexe de la densité de courant \vec{j} en fonction de \vec{E} , n , e , m , ω et τ .

2 - Montrer que le métal suit convenablement la loi d'Ohm tant que la fréquence reste nettement inférieure à $\frac{1}{\tau}$. Calculer littéralement et numériquement, la valeur de la conductivité prédite par le modèle et la comparer à la valeur mesurée : $\sigma = 5,6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

3 - Donner l'expression en fonction de σ , E_0 , ω et τ de la puissance volumique moyenne $\langle p \rangle$ dissipée dans le métal. Que peut-on dire aux fréquences nettement supérieures à $\frac{1}{\tau}$?

4 - On rappelle l'expression de la pulsation de coupure dans un plasma de densité de charges $-e$ mobiles n : $\omega_p^2 = \frac{n.e^2}{\epsilon_0.m}$.

Calculer numériquement pour le cuivre la longueur d'onde λ_p associée. Dans quel domaine du spectre est-elle située ?

5 - On étudie la possibilité de propagation dans le métal d'une onde électromagnétique plane sinusoïdale de vecteur d'onde \vec{k} et de pulsation ω . Ecrire les équations de Maxwell en notation complexe et en déduire la structure de l'onde.

6 - Montrer, pour tout ω , que la relation de dispersion du métal peut-être mise sous la forme : $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{c^2} (1 - A)$ où A est une quantité que l'on exprimera en fonction des grandeurs sans dimension et $\frac{\omega_p}{\omega}$.

7 - Donner une forme approchée de la relation de dispersion valable dans tout le domaine des fréquences industrielles et des ondes hertziennes.

En déduire la nature de l'onde pouvant pénétrer dans le métal et mettre en évidence une profondeur de pénétration δ (épaisseur de peau) que l'on exprimera puis dont on calculera la valeur pour $\lambda = 10 \text{ cm}$.

8 - Donner une forme approchée de la relation de dispersion valable depuis le domaine de l'optique du visible jusqu'aux rayons X et mettre en évidence le rôle de la pulsation ω_p .

9 - Décrire le comportement de l'onde dans le domaine visible. Que devient un faisceau lumineux dirigé vers le métal ?

Montrer que, dans le domaine visible, la profondeur de pénétration Δ est sensiblement indépendante de la fréquence. Evaluer Δ littéralement puis numériquement.

★ 10 - On parle pour certains métaux de phénomène de transparence ultraviolette. Justifier cette expression. On réalise une lentille biconcave en cuivre et on utilise celle-ci dans le domaine ultraviolet lointain. Quel est (qualitativement) le signe de sa vergence ?

★ 11 - On constate qu'il est possible de réfléchir un faisceau parallèle de rayons X sur un miroir métallique à condition que l'inclinaison du faisceau ne dépasse pas un angle limite α de valeur faible (réflexion rasante).(utiliser les lois de Descartes)

Expliquer ce phénomène et exprimer α en fonction de $\frac{\omega}{\omega_p}$. A.N. pour $\lambda = 1,2 \text{ nm}$.

Pour quelle raison le modèle est-il mal adapté à la description d'ondes de longueur d'onde plus faible ?

PO404 – Couche anti-reflet (Karl / Albane)

Une onde électromagnétique plane progressive harmonique polarisée rectilignement se propage dans l'air (d'indice 1) dans la direction des z croissants et atteint sous incidence normale une plaque de verre d'indice n , recouverte d'une couche d'épaisseur e , transparente, d'indice n_0 (l'origine de l'axe des z est au milieu de la couche d'indice n_0). L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans l'air, une onde réfléchie et une onde transmise dans la couche intermédiaire d'indice n_0 et une onde transmise dans le verre d'indice n .

1 – Ecrire les champs électriques et magnétiques de chacune de ces ondes (en notation complexe).

On admet qu'à chaque interface, le champ magnétique est continu ainsi que la composante tangentielle du champ électrique.

2 – En déduire les relations de continuité en $z = -\frac{e}{2}$ et en $z = \frac{e}{2}$

3 – On obtient l'annulation de l'onde réfléchie si la relation $\frac{(n_0+1).(n_0-n)}{(n_0-1).(n_0+n)} \cdot e^{-2.i.n_0.e.\omega/c} = 1$ est vérifiée.

Comment faut-il choisir n_0 et e pour annuler l'onde réfléchie dans l'air ? (adaptation d'impédance)

4 – La condition précédente étant vérifiée, le champ électrique de l'onde transmise dans le milieu d'indice n a une amplitude réelle égale à $\frac{n_0+1}{n_0+n}$ fois celle du champ électrique de l'onde incidente.

Quelle est alors la puissance surfacique moyenne transmise dans le milieu d'indice n ?

★ PO414 – Onde dans un plasma + champ magnétique

Une onde plane progressive harmonique se propage selon Oz dans un plasma idéal composé d'électrons et d'ions de charges $-e$ et $+e$ en densités volumiques égales n_0 . On fera l'approximation que seuls les électrons sont libres de se déplacer.

Le milieu est de plus soumis à un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_x$.

1 – Etablir les équations reliant les composantes du vecteur densité volumique de courant \vec{j} à celles du champ électrique \vec{E} .

2 – Etudier la propagation d'une OPPH polarisée rectilignement selon Ox . Commenter le résultat obtenu.

3 – Que dire d'une OPPH telle que $E_x = 0$? Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$.

On pourra poser $\omega_p^2 = \frac{n_0 \cdot e^2}{m \cdot \epsilon_0}$ et $\omega_c = \frac{e \cdot B_0}{m}$