



Equation locales de l'électromagnétisme

EM722 - Bilan d'énergie pour un fil conducteur ohmique (Hedwige)

Un fil conducteur rectiligne de conductivité g , assimilé à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a est soumis à un champ électrique permanent et uniforme :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$$

On rappelle le champ magnétique créé par le fil parcouru par un courant I réparti uniformément dans le fil :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta \text{ pour } r < a$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \text{ pour } r \geq a$$

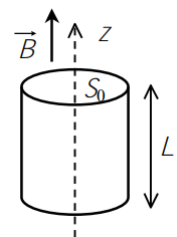
1 – Relier I à E_0 .

2 – Quel est le flux du vecteur de Poynting à travers un cylindre d'axe (Oz) de hauteur h et de rayon r .

3 – Conclure à l'aide d'un bilan d'énergie électromagnétique.

EM710 – Chauffage par courants de Foucault (Brieuc / Quentin)

Un cylindre métallique, de hauteur L selon l'axe Oz, de conductivité γ et de section $S_0 = \pi R^2$, est placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ imposé par des sources extérieures. On suppose que le champ électrique induit dans le conducteur n'est dû qu'aux variations du champ magnétique imposé $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques.



1 - Calculer le champ électrique induit dans le cylindre.

2 - Calculer la puissance moyenne dissipée par les courants de Foucault induit dans l'ensemble du cylindre. Discuter de l'influence des paramètres S_0 et ω sur cette puissance de chauffe.

En fait, ces courants induisent un champ magnétique $\vec{B}_i = B_i(r, t) \vec{e}_z$

3 - Pourquoi est-il légitime de négliger le courant de déplacement ? Calculer $\vec{B}_i$. Quelle condition doit-on imposer à R pour que le champ induit soit négligeable devant le champ excitateur ?

★ **EM704 – Condensateur alimenté en haute fréquence. Limite de l'ARQS (Inès)**

Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de même rayon a , d'axe Oz situés dans les plans $z = \pm h$ et séparés par du vide. On admet que $\vec{E}$ est colinéaire à $\vec{u}_z$ à l'intérieur du système. Pour $h \ll a$ ce modèle est justifié dans le volume intérieur au système sauf au voisinage immédiat des bords $r = a$. Le système est soumis à une tension sinusoïdale de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

Le but du problème est de déterminer la structure du champ électromagnétique dans le condensateur sans s'en tenir nécessairement au domaine des basses fréquences.

1 – On admet d'abord que le champ électrique, selon le modèle usuel du condensateur plan tel qu'il est utilisé en électrostatique, est uniforme à l'intérieur du condensateur et on le note :

$$\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{u}_z \quad \text{où} \quad E_0 = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_1(r, t) = B_1(r, t) \cdot \vec{e}_\theta$ induit par les variations temporelles de $\vec{E}_0$

2 – Déterminer le champ électrique $\vec{E}_1(r, t)$ induit par les variations temporelles de $\vec{B}_1$.

3 – Exprimer $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ en fonction de $\vec{E}_0$ et de la variable $x = \frac{r \cdot \omega}{c}$.

Avec $a = 10 \text{ cm}$ et $\nu = 10 \text{ MHz}$, évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on commet en confondant dans tout le système l'expression du champ avec celle valable en très basse fréquence.

A quel concept la condition $x \ll 1$ s'identifie-t-elle ?



Expliquer pourquoi $\vec{E}$ ne correspond toujours pas à une solution exacte du problème.

4 – On considère donc maintenant une solution sous la forme :

$$\vec{E} = E \cdot \vec{u}_z \quad \text{où} \quad E = A(r, z) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Montrer que $\vec{E}$ ne dépend pas de z et établir une équation différentielle vérifiée par $A(r)$.

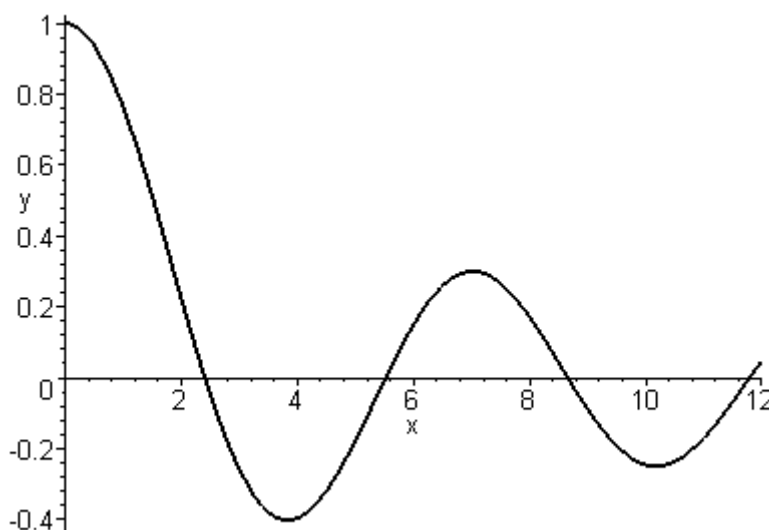
En posant $y = \frac{A(r)}{A(0)}$ et $x = \frac{r \cdot \omega}{c}$, en déduire une équation différentielle vérifiée par $y(x)$.

5 – En cherchant des solutions de cette équation sous la forme $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, établir une récurrence et en déduire les deux premiers termes de la série en partant de $a_0 = 1$. Comparer aux résultats des questions précédentes.

6 – La solution de cette équation différentielle constitue une des fonctions de Bessel dont voici le graphe.

En déduire la plus basse fréquence à laquelle il est possible d'observer une région de champ nul dans le volume du condensateur de rayon $a = 10 \text{ cm}$.

Calculer la valeur correspondante de la longueur d'onde et conclure.

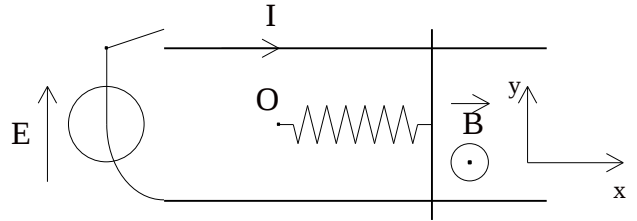


Induction électromagnétique

Induction de Lorentz

EM_Induc_12 - Rails de Laplace + ressort

Le barreau mobile de longueur a et de masse m est relié à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dans le plan de deux rails conducteurs et dont l'autre extrémité est fixée en O. Le circuit a une résistance totale R .



Les rails sont reliés à un générateur permanent de f.é.m. E . Le dispositif est horizontal vu du dessus.

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le barreau étant à sa position d'équilibre $x = 0$. Il peut glisser sans frottement.

1 - Etudier **qualitativement** le mouvement du barreau. On précisera en particulier le rôle de la loi de Lenz. Donner la position d'équilibre du barreau.

2 - Etablir les équations électrique et mécanique du système.

3 - Décrire les divers mouvements possibles et donner la valeur k_c de k permettant d'obtenir un amortissement critique. En déduire les lois horaires de $x(t)$ et de $I(t)$.

4 - Effectuer un bilan de puissance. Commenter.

Données : $B = 1,0 \text{ T}$; $a = 10 \text{ cm}$; $R = 10 \Omega$; $m = 50 \text{ g}$

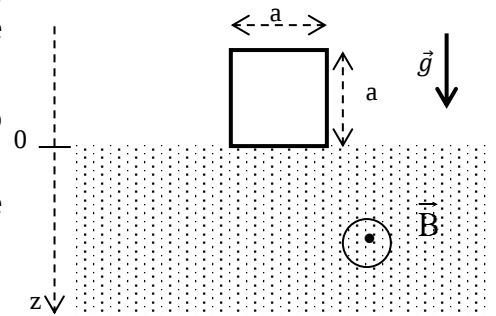
EM_Induc_14 – Freinage magnétique

Une spire de masse m de résistance R est lâchée dans le vide, d'accélération de la pesanteur g . Dans le demi-espace $z > 0$ règne le champ $\vec{B}$ constant et uniforme.

À $t = 0$, $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_z$ lorsque le cadre pénètre dans la zone de champ $\vec{B}$.

1 – Décrire le mouvement de la spire. Préciser le rôle de la loi de Lenz.

2 - Etablir la vitesse de chute de la spire en fonction du temps.



Induction de Von Neuman

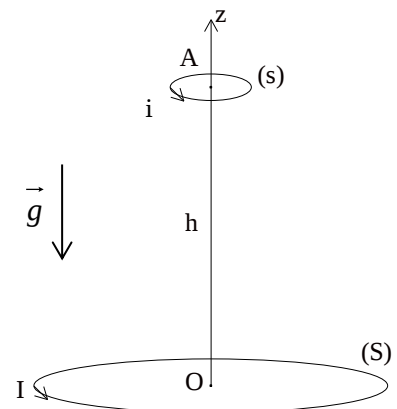
EM_Induc_22 - Lévitación magnétique ★ EM_Induc_22 -

Lévitación magnétique

Sur l'axe vertical d'une spire (S) de rayon R , de centre O, et parcourue par un courant d'intensité $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ variable dû à un générateur non représenté, on place une petite bobine circulaire (s) de rayon r_0 , de centre A, et parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ induit. Elle possède un coefficient d'auto-induction L et une masse m dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Sa résistance est négligée.

On remarque que (s) lévite et se stabilise à une distance h de (S).

On supposera dans la suite h et $R \gg r_0$.



1 – Etude qualitative

a) Représenter quelques lignes de champ générées par (S), notamment celle passant par (s).

b) Quelle composante du champ magnétique est responsable de la lévitation de (s) et à quelle condition sur le signe du produit $I(t) \cdot i(t)$?

2 – Etude quantitative

On rappelle l'expression du champ magnétique créé par (S) en un point M(z) de l'axe (Oz) :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z$$

a) Par application de la conservation du flux magnétique à travers un cylindre s'appuyant sur (s) et de hauteur dz en déduire une expression approchée du champ magnétique sur le fil constituant (s).

Calculer $B_r(r,z)$.

b) Exprimer le courant induit $i(t)$ dans (s) (avec $i(0) = 0$). Commenter.

c) Exprimer la force $\langle \vec{F} \rangle$ qu'exerce (S) sur (s) et représenter $F(z)$.

d) Discuter graphiquement de l'existence et de la stabilité de positions d'équilibre.

EM_Induc_24 - Pince ampère métrique

Pour mesurer des fortes intensités sur le réseau de distribution, il est hors de question de couper le circuit pour interposer un ampèremètre, pour des raisons de sécurité d'une part et pour assurer la continuité du service de distribution d'électricité si la coupure ne se justifie pas. Les électriciens utilisent une pince ampère métrique.

Elle est constituée d'un solénoïde torique de rayon moyen R fait de N spires carrées de côté a parcourues par un courant $i(t)$, de résistance Q .

On note L le coefficient d'auto-induction de ce tore.

La pince est fermée sur un fil rectiligne d'axe (zz') constitué du câble du réseau dont on désire mesurer le courant $I(t)$

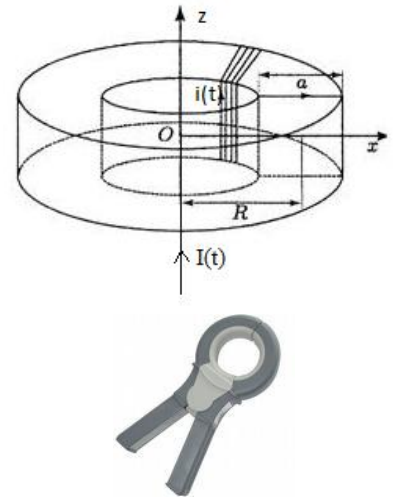
On note M le coefficient de mutuelle-induction entre le fil et le tore. On

donne $M = \frac{L}{N}$

On a $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et on mesure le courant induit $i(t)$ dans le circuit du tore que l'on ferme sur un ampèremètre.

1 - Déterminer $i(t)$.

2 - Simplifier son expression si $L\omega \gg Q$ et conclure quant-au caractère pratique de ce dispositif.



Induction mixte

★ EM_Induc_32 - Moteur asynchrone

Une bobine plate, de centre O, formée de N spires de section S , d'inductance propre L et de résistance r tourne à la vitesse angulaire constante $\omega > 0$ autour de l'axe (Oz). Sa position est repérée par l'angle entre $\vec{u}_x$ et le vecteur $\vec{n}$ normal au plan de la bobine : $(\vec{u}_x; \vec{n}) = \omega \cdot t - \alpha_0$ où α_0 est une constante positive.

Cette bobine est plongée dans un champ magnétique uniforme, de norme B constante, tournant autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\omega_0 > 0$ constante : $(\vec{u}_x; \vec{B}) = \omega_0 \cdot t$

a) Déterminer la valeur à l'instant t de l'angle $\alpha(t) = (\vec{n}; \vec{B})$. En déduire le flux $\Phi(t)$ du champ $\vec{B}$ à travers la bobine.

Quelle est la force électromotrice induite ?

b) En régime établi, cette f.é.m. engendre dans le circuit (r, L) un courant sinusoïdal $i(t)$ de même pulsation que e , qu'on exprimera sous la forme $i(t) = I \sin(\alpha(t) - \varphi)$, où φ est une constante. Exprimer I et $\tan \varphi$ en fonction de $\Phi_0 = N \cdot B \cdot S$, r , L , ω et ω_0 .

c) A quel couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \cdot \vec{u}_z$ le circuit est-il soumis ? Quelle est sa valeur moyenne Γ_m en fonction de I , S , B et φ ?

d) A quelle condition ce couple est-il moteur ?

e) Tracer l'allure de Γ_m en fonction de la pulsation ω . Dans quel domaine de pulsation le dispositif fonctionne-t-il en moteur ? On justifiera l'appellation de moteur asynchrone.

f) Un tel moteur peut-il démarrer seul ?

g) On suppose que le moteur a à vaincre un couple résistant de norme constante Γ_r . Etudier la stabilité du fonctionnement.

