



Diffusion SANS source ni puits

TH206 – Dialyse (Christopher)

a) De l'urée diffuse en régime stationnaire avec un coefficient D à travers une membrane d'épaisseur e et de section S . Exprimer le flux d'urée en fonction de S , D , e et des densités particulières n_1 et n_2 dans les récipients (1) et (2) de part et d'autre de la membrane.

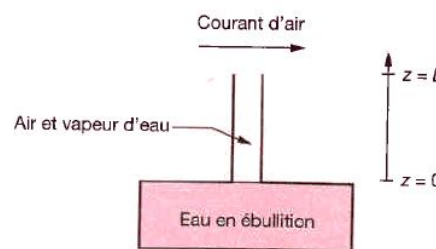
b) La membrane sert à dialyser du sang contenu dans un récipient de volume V en le reliant à un récipient de volume $2.V$ contenant initialement de l'eau pure. On donne le nombre volumique n_0 initial d'urée dans le sang. En admettant que le résultat de la question a) reste valable, établir les équations différentielles dont sont solutions les nombres de molécules d'urée $N_1(t)$ et $N_2(t)$ dans les deux compartiments.

c) En déduire la durée T nécessaire pour que la concentration en urée dans le sang soit divisée par deux.

d) A quelle condition l'hypothèse du b) est-elle vérifiée ?

TH204 – Diffusion de vapeur d'eau dans l'air (Sixtine)

De l'eau est portée juste à ébullition dans un béccher, de telle sorte qu'à sa surface de cote $z = 0$, la densité moléculaire prenne pendant la durée de l'étude la valeur fixée $n(z = 0, t) = n_0 = \frac{P}{k_B T}$ où $P = 1 \text{ bar}$ est la pression de vapeur saturante à la température $T = 100^\circ \text{C}$. Le béccher est fermé et surmonté d'un tube vertical de section S et de hauteur L dans lequel on note $n(z, t)$ la densité moléculaire de vapeur d'eau qui diffuse dans l'air qui joue le rôle de fluide support.

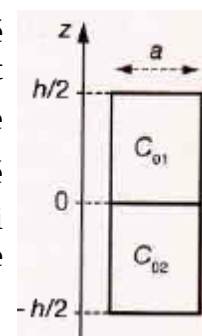


A l'extrémité supérieure du tube, de cote $z = L$, un courant d'air emporte par convection des molécules d'eau et impose une relation entre la densité de flux de particules et la densité moléculaire de la forme $j_N(z=L, t) = k \cdot n(z=L, t)$ où k est une constante.

Déterminer $n(z)$ et j_N en régime stationnaire en fonction de z , k , n_0 , L et D (coefficient de diffusion)

★ TH202 – Mesure optique d'un coefficient de diffusion (Enguerrand)

Une cuve parallélépipédique de longueur $h = 10 \text{ cm}$ selon $\vec{u}_z$ et de section carrée de côté a selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ comprend deux compartiments : initialement le compartiment $0 < z < \frac{h}{2}$ contient un solvant avec un soluté dilué homogène de densité moléculaire C_{01} ; le compartiment $-\frac{h}{2} < z < 0$ contient le même solvant et le même soluté dilué homogène de densité moléculaire $C_{02} \neq C_{01}$. A l'instant $t = 0$ on supprime la paroi qui sépare les deux compartiments et le soluté diffuse avec un coefficient de diffusion D le long de la direction $\vec{u}_z$.

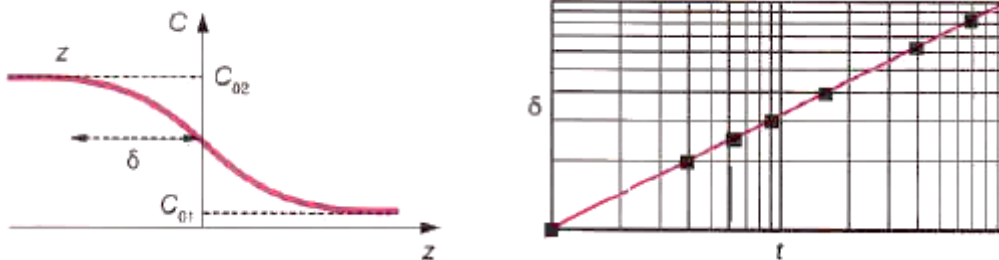


1 – Prévoir l'expression de $C(z, t)$ à l'instant $t = +\infty$.

2 – Quelles sont les conditions initiales $C(z, t = 0)$? Quelles sont les conditions limites $C(z = -\frac{h}{2}, t > 0)$ et $C(z = \frac{h}{2}, t > 0)$?

Quelles sont les deux conditions aux limites en $z = 0$ pour $t > 0$?

3 – Il est possible de suivre les variations de $C(z, t)$ en plaçant la cuve dans un bras d'un interféromètre de Michelson et on obtient l'allure indiquée sur la figure ci-dessous. La distance caractéristique δ est une fonction du temps dont le graphe des variations en échelle log-log est donné ci-dessous dans le domaine temporel envisagé où on a $\delta(t) \ll h$. Interpréter.



4 – On admet dans la suite que les instants t envisagés sont suffisamment faibles pour qu'on puisse supposer que $h = \infty$. On admet que la fonction :

$$C(z < 0, t) = A_2 + B_2 \cdot \int_{-\infty}^v e^{-u^2} \cdot du \quad C(z > 0, t) = A_1 + B_1 \cdot \int_{+\infty}^v e^{-u^2} \cdot du$$

Avec $v = \frac{z}{2\sqrt{D \cdot t}}$ est solution de l'équation de diffusion.

- a) Déterminer les constantes A_1, A_2, B_1 et B_2 en fonction de C_{01} et C_{02} pour que la solution convienne, sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- b) Confronter le modèle de la question 3 au résultat de la question 1. Interpréter.

★TH208 – Diffusion en présence d'un champ extérieur (Raphaël)

On étudie un équilibre de sédimentation mettant en jeu la diffusion, mais aussi le champ de pesanteur. Des particules sphériques de rayon R , de masse volumique ρ , sont en suspension dans un fluide de masse volumique ρ_0 . Leur densité volumique n ne dépend que de la hauteur z par rapport au fond du récipient. Au cours de leur chute, les particules sont soumises à la force visqueuse de Stokes $-6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot \vec{v}$ où η est la viscosité du liquide.

Les particules sont aussi soumises à leur poids et à la poussée d'Archimède.

1 – Au cours de leur chute, les particules atteignent rapidement une vitesse limite. La déterminer.

2 – En déduire l'expression de la densité de courant d'entraînement.

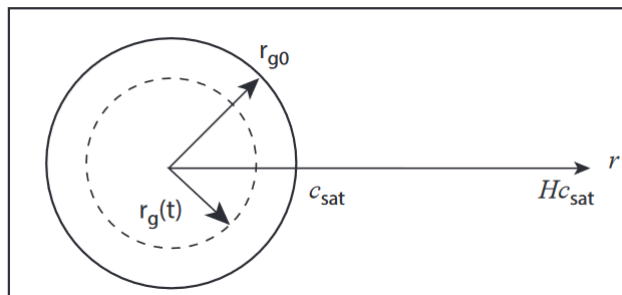
3 – Quelle est celle de la densité de courant diffusif ?

4 – En déduire l'expression de $n(z)$ en régime stationnaire avec $n(0) = n_0$.

5 – Cette expression peut aussi s'interpréter à l'aide du facteur de Boltzmann. En déduire une relation entre le coefficient de diffusion D , la constante de Boltzmann k_B , la température T , le rayon R et la viscosité η (Relation d'Einstein).

★TH210 – Évaporation d'une goutte d'eau sphérique (Dante)

On considère une goutte d'eau sphérique de rayon $r_g(t)$ à l'instant t et r_{g0} initialement. r désigne la distance au centre de la goutte. Cette goutte est plongée dans une atmosphère d'air humide d'humidité relative $H = 53\%$. On appelle humidité relative le rapport de la pression partielle de vapeur d'eau à la pression de vapeur saturante à la température T .



1 – On considère l'évaporation suffisamment lente pour supposer que le régime stationnaire est atteint à chaque instant. Rappeler l'équation de la diffusion vérifiée par la concentration molaire volumique $c(r, t)$ en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ de vapeur d'eau formée.

2 – Etablir la solution en considérant qu'à la surface de la goutte, l'air est saturé d'humidité : $c(r_g(t), t) = c_{\text{sat}}$ et que loin de la goutte, l'air a une humidité relative H .

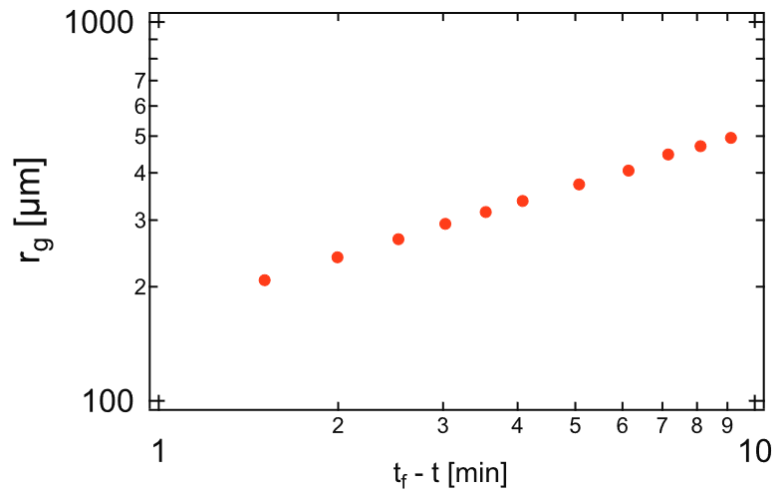
3 – On introduit le taux d'évaporation $I = -\frac{dm}{dt}$ où $m(t)$ est la masse de la goutte à l'instant t . Exprimer $I(t)$ en fonction de D (coefficient de diffusion), $r_g(t)$, c_{sat} , M (Masse molaire de l'eau) et H .

En déduire l'équation d'évolution du rayon de la goutte $r_g(t)$.

On donne ci-dessous le graphe obtenu expérimentalement. On donne $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\mu = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ masse volumique de la goutte, $T = 292,8 \text{ K}$, $p_{\text{sat}} = 23 \text{ kPa}$ pression de vapeur saturante de l'eau à la 292,8 K. La vapeur sera assimilée à un gaz parfait.

4 – Déduire de la courbe la valeur du coefficient de diffusion.

5 – On a fait l'approximation du régime stationnaire. Cette hypothèse est-elle vérifiée expérimentalement ?



Evolution du rayon d'une goutte d'eau suspendue en train de s'évaporer. t_f est l'instant où la goutte s'est totalement évaporée.

Diffusion AVEC source ou puits

TH222 – Réacteur nucléaire (Yannis / Antoine B.)

On étudie un réacteur nucléaire à une dimension : la densité volumique est $n(x,t)$. En moyenne, $\frac{n}{\tau}$ neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume, et, pour un neutron absorbé, K neutrons sont produits ($K > 1$). Enfin, leur diffusion dans le milieu satisfait à la loi de Fick, le coefficient de diffusion étant D . Le réacteur est situé entre les plans d'abscisses $x = -a$ et $x = +a$. On impose $n(\pm a, t) = 0$.

- 1 – Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x,t)$ (équation (1)).
- 2 – Dans cette question, on se place en régime stationnaire. Déterminer $n(x)$ sachant que $n(0) = n_0$.
- 3 – On se place en régime quelconque. On cherche une solution de l'équation (1) sous la forme

$$n(x, t) = f(x) \cdot e^{-t/T}.$$

Déterminer $f(x)$ et T et discuter de la stabilité du réacteur suivant les valeurs de la longueur $L = 2.a$ du réacteur.

Description probabiliste

TH232 – Marche au hasard unidimensionnelle d'une particule élastiquement liée – Equation de Smoluchowski.

Une particule se déplace au hasard sur un axe Ox en effectuant des pas de longueur fixe ℓ , soit vers la droite avec la probabilité $P_+ = \left(1 - \frac{m}{N}\right)/2$, soit vers la gauche $P_- = \left(1 + \frac{m}{N}\right)/2$, avec N un entier donné et m repère la position de la particule $m \cdot \ell$. une égale probabilité ; deux pas successifs sont séparés par un intervalle de temps τ , toujours le même. Les pas sont statistiquement indépendants. On note $P(n, s, n_0)$ la probabilité pour que la particule se trouve au point d'abscisse $n \cdot \ell$ à l'instant $s \cdot \tau$ sachant qu'elle se trouve à l'abscisse $n_0 \cdot \ell$ au temps $t = 0$.

- 1 – Exprimer $P(n, s, n_0)$ en fonction des $P(n', s-1, n_0)$.

2 – On suppose que ℓ et τ tendent simultanément vers zéro et N tend vers l'infini, de telle façon que $\frac{\ell^2}{\tau}$ vaille une constante D non nulle et $\frac{1}{N \cdot \tau} = \gamma$. On pose $n \cdot \ell = x$ et $s \cdot \tau = t$. En développement jusqu'au premier ordre significatif la relation précédente, montrer que la densité de probabilité $w(x, t, x_0)$ pour que la particule se trouve à l'abscisse x (à dx près) à l'instant t , étant partie de l'abscisse $x_0 = n_0 \cdot \ell$, vérifie une équation de Smoluchowski :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial(x \cdot w)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

- 3 – Montrer que la distribution gaussienne

$$w(x, t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

ayant pour centre la valeur moyenne $\bar{x}(t)$ et pour écart type $\sigma(t)$ satisfait l'équation de Smoluchowski.