



MF208 – Caractérisation d'un écoulement

On considère un écoulement de fluide caractérisé par le champ de vitesse :

$$\begin{cases} v_x = 2x + y^2 \\ v_y = x - z \\ v_z = 3x^2 - 2z \end{cases}$$

1 - Ce champ est-il stationnaire ?

2 - L'écoulement est-il incompressible ?

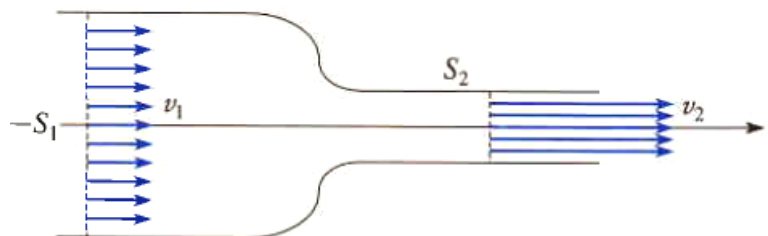
3 - L'écoulement est-il tourbillonnaire ? Si oui, évaluer le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} = 2 \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{écoulement tourbillonnaire.}$$

Réponse :

MF212 – Ecoulement d'un fluide incompressible dans une tuyère

Soit un écoulement de fluide incompressible dans une conduite possédant un rétrécissement. La section diminue de S_1 vers S_2 . La vitesse est supposée uniforme sur une section, v_1 au niveau de S_1 et v_2 au niveau de S_2 .



1 - Quelle relation lie S_1 , S_2 , v_1 et v_2 ?

2 - Tracer l'allure des lignes de courant. Commenter.

Réponse : 1) $S_1 v_1 = S_2 v_2$; 2) Les lignes de courant se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la vitesse du fluide incompressible.

MF204 – Ecoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tournant autour de leur axe commun aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 peut être décrit par le champ de vitesses :

$\vec{v} = \left(A \cdot r + \frac{B}{r} \right) \cdot \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques.

1 - Déterminer les constantes A et B en écrivant la continuité des vitesses du fluide et des cylindres en R_1 et en R_2 .

2 - Commenter le cas $\Omega_1 = \Omega_2$.

3 - Déterminer l'accélération d'une particule de fluide (utiliser le formulaire).

$$\text{Réponses : 1) } A = \frac{R_2^2 \Omega_1 - R_1^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2} ; B = \frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2} ; 2) \vec{v} = r \Omega \vec{e}_\theta. \text{ Le fluide tourne en bloc (comme un solide) ; 3) } \vec{a} = - \left(A r + \frac{B}{r} \right) \frac{v}{r} \vec{e}_r$$

MF202 – Ecoulement ondulant (Zoé)

Considérons le fluide caractérisé par le champ de vitesse eulérien suivant : $\vec{v} = \begin{cases} v_x = b \\ v_y = a \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{cases}$

où $b = 1,0 \text{ m.s}^{-1}$, $a = 2, \pi \text{ m.s}^{-1}$ et $\omega = 2, \pi \text{ rad.s}^{-1}$.

a) Etablir l'équation des lignes de courant. Tracer celles qui passent par les ordonnées $y_0 = -1, 0, 1 \text{ m}$ aux instants $t = 0, 0,5, 1,5 \text{ s}$.

b) Calculer l'expression de l'accélération en formalisme eulérien. Remarque

c) Cet écoulement est-il incompressible ?



MF214 - Circulation entre deux disques (Rachel)

Un jet d'air est envoyé entre deux disques parallèles de rayons R , à travers un trou au centre de l'un des disques.

1 – Déterminer la loi de vitesse de l'air entre les disques, supposée radiale en symétrie cylindrique d'écoulement. On supposera l'écoulement incompressible après avoir précisé la condition de cette hypothèse. On notera v_0 la vitesse de l'air aux bords des disques.

2 - Déterminer l'accélération du fluide en $r = 0,5 R$ et $r = R$ en prenant $v_0 = 5,0 \text{ m/s}$ et $R = 50 \text{ cm}$.

★ MF206 – Vortex dans la rivière (Enguerrand)

Dans un lit de rivière, on observe parfois des tourbillons (vortex) à certains endroits, généralement près des rives formant un coin. Des objets flottants sur l'eau ou de la mousse peuvent être piégés dans ces zones où l'eau évolue en circuit fermé. L'exercice propose d'étudier un exemple de ce type d'écoulement où le fluide circule à proximité de deux parois formant un angle droit dans lequel un vortex est présent. Les lignes de courant sont représentées sur la figure suivante.

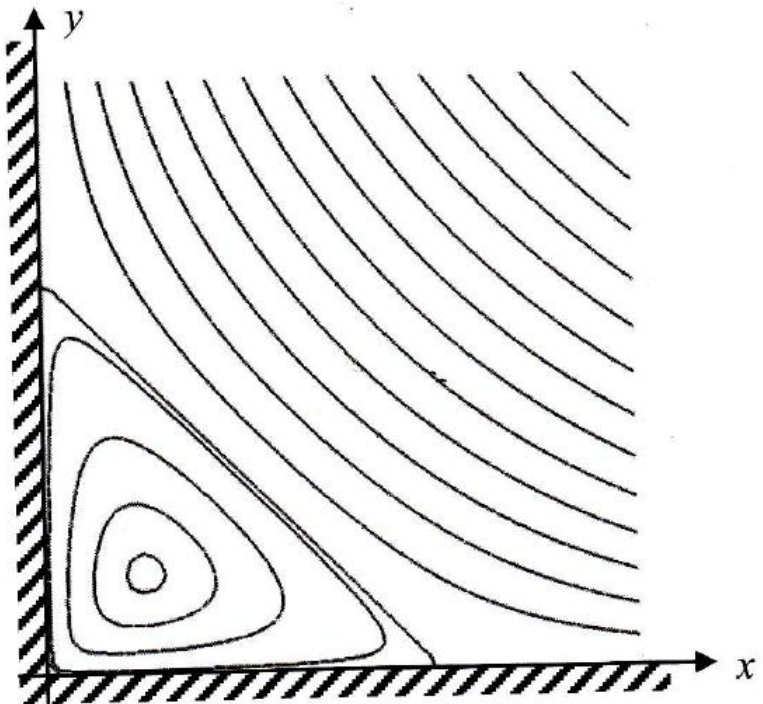
On suppose l'écoulement invariant selon l'axe Oz. Le champ de vitesses est donné dans le repère Oxy par les expressions :

$$v_x = K \cdot x \left(1 - \frac{x \cdot L}{(x + y)^2} \right)$$

et

$$v_y = -K \cdot y \left(1 - \frac{y \cdot L}{(x + y)^2} \right)$$

Où L désigne une longueur et K une constante positive.



1) Montrer que l'écoulement est incompressible.

2) Exprimer le vecteur tourbillon.

3) Indiquer sur la figure :

- Le sens des lignes de courant.
- La zone délimitant le vortex
- Le centre du vortex, dont on déterminera les coordonnées en fonction de L .

4) Exprimer la période de rotation des particules de fluides autour d'elles-mêmes au centre du vortex.

MF302 – Ecoulement bidimensionnel rotationnel (Théophane /

Considérons l'écoulement fluide caractérisé par le champ des vitesses suivant : $\vec{v} = \begin{vmatrix} v_x = a \cdot y \\ v_y = 0 \end{vmatrix}$ où $a > 0$

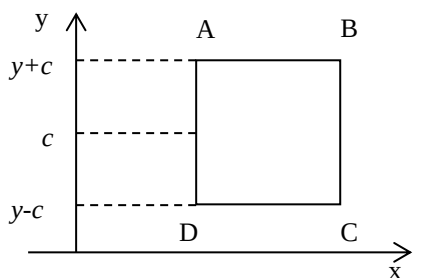
et constante.

1 – Tracer l'allure des lignes de champ (lignes de courant). Présentent-elles une courbure ? L'écoulement est-il rotationnel ?

2 – Pour mieux comprendre ce paradoxe apparent, on considère une particule de fluide carrée de côté $2 \cdot c$ de centre M représentée ci-contre à l'instant t .

Déterminer la position relative des segments [AB] et [DC] à l'instant $t + dt$. Quel angle fait alors le segment [AD] avec (Oy) ?

3 – La particule de fluide se déforme-t-elle au cours du mouvement ? L'écoulement est-il compressible ? L'écoulement est-il rotationnel ?



MF312 – Source et puits d'écoulement – Ecoulement dipolaire à deux dimensions (Paul / Hugo)

1 - Une source ponctuelle de fluide incompressible placée au centre O d'un repère cylindrique a un débit volumique D_V permanent. On étudie l'écoulement à symétrie cylindrique qu'il génère dans le plan $z = 0$ supposé d'épaisseur e .

a) En déduire l'expression de la vitesse du fluide $\vec{v}(r)$ en fonction de D_V et de r . L'écoulement est-il stationnaire ? rotationnel ?

b) En déduire le potentiel des vitesses Φ_1 associé à ce champ des vitesses, en un point M quelconque.

c) Par analogie, réécrire ce potentiel en M dans le cas où la source se trouve au point S_1 tel que $\overrightarrow{S_1M} = \vec{r}_1$

2 – On associe à la source précédente placée en S_1 , un puits ponctuel placé en S_2 évacuant le fluide avec le même débit volumique D_V . On place S_1 et S_2 tels que $\overrightarrow{S_1O} = \overrightarrow{OS_2} = \frac{d}{2} \cdot \vec{e}_x$

a) En déduire l'expression du potentiel des vitesses Φ_2 associé à ce puits seul.

b) Ces deux potentiels Φ_1 et Φ_2 étant solutions de la même équation de Laplace, leur somme également. On réalise la somme Φ de ces potentiels comme solution du problème où interviennent la source S_1 et le puits S_2 .

Ecrire une expression approchée de Φ en M en fonction de $r = OM$ en supposant $d = S_1S_2 \ll r$. On adoptera ici les coordonnées polaires de centre O.

c) En déduire l'expression de la vitesse du fluide en M, $\vec{v}(M)$. Tracer quelques lignes de courant.

MF314 – Ecoulement autour d'un cylindre (Brieuc / Ekain)

On considère l'écoulement uniforme de vitesse $\vec{U}$ parallèle au plan (xOy) perturbé par la présence d'un cylindre de rayon R et d'axe (Oz). Le problème étant invariant selon z , on le considère à deux dimensions dans le plan $z = 0$.

1 – L'écoulement est considéré irrotationnel. Montrer qu'il permet l'existence d'une fonction scalaire appelée potentiel des vitesses Φ que l'on définira. Quelle équation vérifie Φ si l'écoulement est de plus incompressible ?

2 – De manière générale, on propose comme solution de l'équation différentielle précédente la superposition de potentiels des vitesses « élémentaires ».

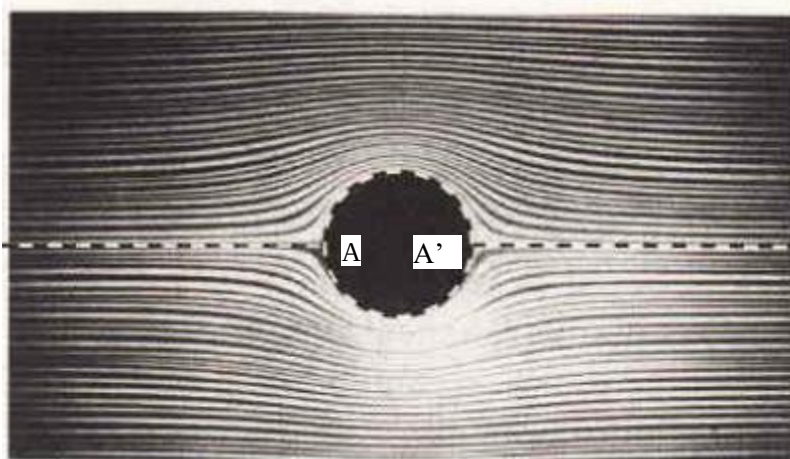
a) Etablir en coordonnées cylindriques le potentiel des vitesses Φ_U associé à l'écoulement permanent uniforme de vitesse $\vec{U} = U \cdot \vec{e}_x$.

On rappelle l'expression du potentiel des vitesses dipolaire établi à l'exercice MF312 : $\Phi_{dipole} = \frac{C \cdot \cos \theta}{2 \cdot \pi \cdot r}$ en coordonnées polaires. On forme le potentiel $\Phi = \Phi_U + \Phi_{dipole}$.

b) Φ rend-il compte du fait que loin du cylindre, l'écoulement est uniforme de vitesse $\vec{U} = U \cdot \vec{e}_x$?

c) A quelle condition sur la constante C, Φ vérifie-t-il la condition limite à la surface du cylindre ?

d) En déduire l'expression du champ des vitesses de l'écoulement $\vec{v}$.



e) Que dire de la vitesse aux points $A(R,0)$ et $A'(R,\pi)$ appelés *points d'arrêt*.

f) Sur la photo ci-dessus où sont matérialisées les lignes de courants, déterminer les zones de forte/faible vitesse d'écoulement.

★ MF316 – Écoulement autour d'un cylindre en rotation (Raphaël)

Comme à l'exercice MF314 on considère l'écoulement uniforme de vitesse $\vec{U}$ parallèle au plan (xOy) perturbé par la présence d'un cylindre de rayon R et d'axe (Oz) en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{e}_z$. Le problème étant invariant selon z , on le considère à deux dimensions dans le plan $z = 0$.

1 – Préliminaire. On considère un tourbillon de rayon R , c'est-à-dire un écoulement tourbillonnaire au voisinage de l'axe (Oz), de vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{e}_z$. Déterminer l'expression du champ de vitesse en tout point extérieur à ce tourbillon en coordonnées cylindriques, puis le potentiel des vitesses associé $\Phi_{\text{tourbillon}}$.

2 – De manière générale, on propose comme solution de l'équation de Laplace la superposition de potentiels des vitesses « élémentaires » ici $\Phi = \Phi_U + \Phi_{\text{dipôle}} + \Phi_{\text{tourbillon}}$

a) Etablir en coordonnées cylindriques le potentiel des vitesses Φ_U associé à l'écoulement permanent uniforme de vitesse $\vec{U} = U \cdot \vec{e}_x$.

On rappelle l'expression du potentiel des vitesses dipolaire établi à l'exercice MF312 : $\Phi_{\text{dipôle}} = \frac{A \cdot \cos \theta}{2 \cdot \pi \cdot r}$.

b) Déterminer A afin que Φ soit solution du problème physique étudié.

c) Déterminer la position d'éventuels points d'arrêt. Discuter en fonction de la valeur prise par Ω . Représenter dans chaque cas l'allure de lignes courant.



Effet Magnus