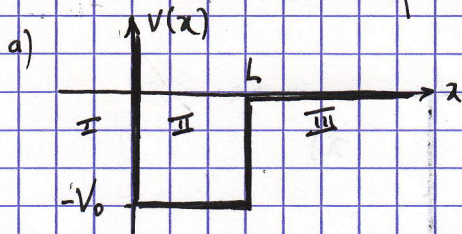


P0402 - Puits semi-infini



b) * Région I : $x < 0$: $\psi_I(x) = 0$

* — II : $0 \leq x \leq L$: $E \psi_{II} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{II}'' - V_0 \psi_{II} \rightarrow \psi_{II}'' + k^2 \psi_{II} = 0$
 $\Rightarrow \psi_{II} = A \cos(kx) + B \sin(kx) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ $k^2 > 0$

* Région III : $x > L$: $E \psi_{III} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{III}'' \rightarrow \psi_{III}'' - \alpha^2 \psi_{III} = 0$ $\alpha^2 > 0$
 $\psi_{III} = C e^{\alpha x} + D e^{-\alpha x}$ diverge

c) Conditions aux limites

• Continuité de $\psi(x)$: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \rightarrow 0 = A \rightarrow \psi_{II} = B \sin(kx)$
 $\psi_{II}(L) = \psi_{III}(L) \rightarrow B \sin(kL) = D e^{-\alpha L}$ (1)

• Continuité de ψ' en $x=L$ seulement : $\psi'_{II}(L) = \psi'_{III}(L)$

$\rightarrow k B \cos(kL) = -\alpha D e^{-\alpha L}$ (2)

$\frac{(1)}{(2)} : \tan(kL) = -\frac{k}{\alpha}$

or k et $\alpha > 0$ (cf choix $E=0$ et choix signe unique de k) $\rightarrow (n+\frac{1}{2})\pi < kL < (n+1)\pi$

or $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 + E)$; $\alpha^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E \rightarrow k^2 + \alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 = \text{cte}$

$\rightarrow \alpha^2 \tan^2(kL) = k^2 \rightarrow (\frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2) \tan^2(kL) = k^2$

$\rightarrow k^2 (1 + \tan^2(kL)) = \frac{2m V_0}{\hbar^2} \rightarrow k \tan(kL) = \frac{2m V_0}{\hbar^2 k}$ $L (\frac{2m V_0}{\hbar^2} - k^2) = k^2 \cotan^2(kL)$

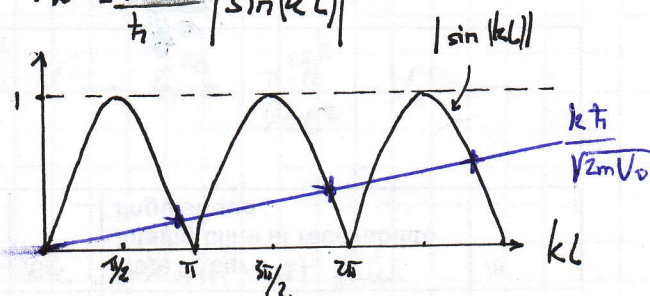
$k^2 = \frac{2m V_0}{\hbar^2} \sin^2(kL) \rightarrow k = \frac{\sqrt{2m V_0}}{\hbar} |\sin(kL)|$

$k_1 L < \pi \rightarrow k_1 < \frac{\pi}{L} = k_{\infty}$

Energie : $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - V_0$ f.o.

$E_{\infty} = \frac{\hbar^2 k_{\infty}^2}{2m} - V_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m L^2} - V_0$

$\rightarrow E_1 < E_{\infty}$



Tout se passe comme si le puits fini avait une largeur effective L' supérieure à L du fait de la pénétration de ψ d'onde dans la région III

$L' \approx L + \frac{1}{\alpha} \approx L + \frac{\hbar}{\sqrt{-2mE}}$