Pb 406 - Transmission sous-marine

1- Équations de Maxwell en notation complexe pour une OPPH de la forme $\underline{\vec E} = \vec E_0\, e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$.

$-i\underline{\vec k}\cdot\underline{\vec E} = 0$; $-i\underline{\vec k}\wedge\underline{\vec E} = -i\omega\underline{\vec B}$

$-i\underline{\vec k}\cdot\underline{\vec B} = 0$; $-i\underline{\vec k}\wedge\underline{\vec B} = \mu_0\sigma\underline{\vec E} + \varepsilon_r\frac{i\omega}{c^2}\underline{\vec E}$

NB : $\vec A\wedge(\vec B\wedge\vec C) = \vec B(\vec A\cdot\vec C) - \vec C(\vec A\cdot\vec B)$

$\rightarrow -i\underline{\vec k}\wedge(-i\underline{\vec k}\wedge\underline{\vec E}) = -i\underline{\vec k}\,\cancel{(-i\underline{\vec k}\cdot\underline{\vec E})} - \underline{\vec E}\,(-i\underline{k})^2 = \underline{k}^2\underline{\vec E}$.

$= -i\underline{\vec k}\wedge(-i\omega\underline{\vec B}) = -i\mu_0\sigma\omega\underline{\vec E} + \varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec E}$

$\Rightarrow \underline{k}^2\underline{\vec E} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\sigma\omega\right)\underline{\vec E} \Rightarrow \boxed{\underline{k}^2 = \varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\sigma\omega}$

On pose $\underline{k} = \underline{n}\frac{\omega}{c}$ d'où $\underline{n}^2 = \varepsilon_r - i\frac{\mu_0\sigma c^2}{\omega}$

soit $\boxed{\underline{n}^2 = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}}$

2- $\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} \simeq \frac{1}{10^{-11}\cdot 10^{8}} = 10^3 \gg \varepsilon_r \Rightarrow \boxed{\underline{n}^2 \simeq -i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}}$

D'où $\underline{n} \simeq \pm\frac{1-i}{\alpha}$ On garde $\boxed{\underline{n} = +\frac{1-i}{\alpha}}$ pour une propagation selon z croissant

On obtient $\underline{E} = E_0\, e^{-z\omega/\alpha c}\, e^{i(\omega t - z\omega/\alpha c)}$ onde harmonique progressive amortie

$\frac{\omega\alpha}{c}$: épaisseur de peau.

Approximation : . $\|\vec j\| \gg \|\vec j_D\|$

. L'équation d'onde est une équation de diffusion $\Delta\vec E = \mu_0\sigma\frac{\partial\vec E}{\partial t}$.

3- $\delta = \frac{\alpha c}{\omega}$: épaisseur de peau : $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}}$

$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{k})} = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}}}$

A.N : $f = 100$ MHz ; $\lambda = 2\pi\delta$; $\delta = 2{,}5$ cm $v_\varphi = 1{,}6\,10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

$f = 500$ kHz ; $\lambda = 2\pi\delta$; $\delta = 36$ cm. $v_\varphi = 1{,}1\cdot10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

$\mathrm{Re}\,\underline{k} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\delta} \longrightarrow \lambda = \delta\cdot 2\pi$

La communication à travers le dioptre air-mer n'est pas possible.

4. Relation de structure : $\vec{B} = \dfrac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$.

× Onde incidente : $\boxed{\underline{\vec{B}_i} = \dfrac{\vec{e_z} \wedge \underline{\vec{E}_i}}{c} = \dfrac{E_0}{c} e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{u_y}}$

× Onde réfléchie : $\boxed{\underline{\vec{B}_r} = -\dfrac{\vec{e_z} \wedge \underline{\vec{E}_r}}{c} = -\dfrac{\underline{r} E_0}{c} e^{i(\omega t + k_1 z)} \vec{u_y}}$

$\vec{k_r} = -k_1 \vec{u_z}$

× Onde transmise : $\boxed{\underline{\vec{B}_t} = \underline{n} \dfrac{\vec{e_z} \wedge \underline{\vec{E}_t}}{c} = \dfrac{\underline{n}\underline{t} E_0}{c} e^{i(\omega t - \underline{k_2} z)} \vec{u_y}}$

$\underline{\vec{k}_2} = \underline{n} \dfrac{\omega}{c} \vec{u_z}$

5. Continuité de $\underline{\vec{E}}$ en $z=0$: $1 + \underline{r} = \underline{t}$ (a)

de $\underline{\vec{B}}$ en $z=0$: $1 - \underline{r} = \underline{n}\underline{t}$ (b)

(a) + (b) : $2 = \underline{t}(1+\underline{n}) \Rightarrow \boxed{\underline{t} = \dfrac{2}{1+\underline{n}}}$

$\underline{n}$(a) − b : $\underline{n}(1+\underline{r}) - 1 + r = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{r} = \dfrac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}}$

6. $R = |\underline{r}|^2 = \left|\dfrac{1 - \frac{1-i}{\alpha}}{1 + \frac{1-i}{\alpha}}\right|^2$; $T = \mathrm{Re}\,\underline{n} \cdot |\underline{t}|^2 = \boxed{\dfrac{4 \cdot \mathrm{Re}(\underline{n})}{|1+\underline{n}|^2}}$

$R + T = \dfrac{|1-\underline{n}|^2 + 4\,\mathrm{Re}\,\underline{n}}{|1+\underline{n}|^2} = \dfrac{(1-\mathrm{Re}\,\underline{n})^2 + \mathrm{Im}\,\underline{n}^2 + 4\,\mathrm{Re}\,\underline{n}}{|1+\underline{n}|^2} = \dfrac{(1+\mathrm{Re}\,\underline{n})^2 + \mathrm{Im}\,\underline{n}^2}{|1+\underline{n}|^2}$

$R + T = \dfrac{|1+\underline{n}|^2}{|1+\underline{n}|^2} = 1$ qui traduit la conservation de l'énergie au niveau du dioptre.

7. $\underline{n} \simeq \dfrac{1-i}{\alpha}$; $T \simeq \dfrac{4/\alpha}{\left|1 + \frac{1-i}{\alpha}\right|^2} = \dfrac{4/\alpha}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha^2}} = \dfrac{4}{\alpha + 2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}}$

$T \simeq \dfrac{4}{2 + \alpha + \frac{2}{\alpha}} = \dfrac{4\alpha}{2\alpha + \alpha^2 + 2}$ Or $\alpha = 5\,10^{-2} \ll 1$ à 100 MHz.

→ $\underline{T \simeq 2\alpha} = 0,11 = 11\%$ à 100 MHz

$= 0,75\%$ à 500 kHz

Peu d'énergie transmise à l'interface

8. soit $E_0^2 = 10^{10} E_0^2 T . e^{-2d/\delta}$

→ $\boxed{d = \dfrac{\delta}{2} \ln(10^{10} T)}$ A.N : $d = 26$ cm à 100 MHz

$d = 3,2$ m à 500 kHz

Pour un signal émis sous l'eau, $T = 1$

$\boxed{d' = \dfrac{\delta}{2} \ln(10^{10})}$ $d = 29$ cm à 100 MHz

$d = 4,2$ m à 500 kHz