

316 - Onde électromagnétique dans une cavité

1. Soit une OPH : $\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$

Conditions limites : $E_x(0, t) = 0 \quad \forall t$

$$E_x(a, t) = 0 \quad \forall t$$

$$E_x(0, t) = E_0 e^{-i\omega t} \neq 0$$

$$E_x(a, t) = E_0 e^{i(ka - \omega t)} \neq 0$$

Donc il est nécessaire d'envisager l'existence d'une onde OPH réfléchie par les plans conducteurs se superposant à cette OPH

$$\text{L'onde } \vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x + r E_0 e^{-i(kz + \omega t)} \vec{e}_x$$

Conditions limites : $* E_x(0, t) = 0 = (E_0 + r E_0) e^{-i\omega t} \Rightarrow r = -1$

$$* E_x(a, t) = 0 = E_0 (e^{ika} - e^{-ika}) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\text{d'où } \vec{E} = E_0 e^{-i\omega t} (e^{ik_n z} - e^{-ik_n z}) \vec{e}_x$$

$$\vec{E} = 2i E_0 e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \vec{e}_x$$

Onde stationnaire

* Equation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{soit } \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow 2i E_0 \frac{n\pi}{a} e^{-i\omega t} \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \vec{e}_y = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{d'où } \vec{B}(z, t) = -2 \frac{n\pi E_0}{\omega a} e^{-i\omega t} \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \vec{e}_y + \vec{f}(x, y, z)$$

indépendant de t donc champ statique hors sujet ici $\Rightarrow \vec{f}(x, y, z) = \vec{0}$

NB: Dans le vide, $\vec{E}$ vérifie l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = \vec{0} \rightarrow -\omega_n^2 \vec{E} - c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0 \rightarrow (-\omega_n^2 + k_n^2 c^2) \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{d'où } \omega_n = k_n c$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{a}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{c}{2a} = 10 \text{ GHz}$$

3. Energie électromagnétique volumique : $u_{em} = \frac{\epsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$

$$\langle u_{em} \rangle_t = \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\vec{E} \vec{E}^*) + \frac{1}{4\mu_0} \text{Re}(\vec{B} \vec{B}^*)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2 = \frac{\epsilon_0}{4} 4 E_0^2 \sin^2(k_n z) + \frac{1}{4\mu_0} E_0^2 \frac{k_n^2}{\omega^2} \cos^2(k_n z)$$

$$= E_0^2 \left(\epsilon \sin^2(k_n z) + \frac{1}{\mu_0 c^2} \cos^2(k_n z) \right) \quad \text{or } \frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$$