

PO124 - Câble sans pertes

1 a) * loi des mailles : $u(x+dx, t) + L dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t}(x+dx, t) - u(x, t) = 0$

Nb: Au 1^{er} ordre en dx : $L dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t}(x+dx, t) = L dx \left(\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) + dx \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x, t) \right)$
 $\approx L dx \frac{\partial i}{\partial x}(x, t)$

D'où $\frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (a)$

* loi des nœuds : $i(x, t) - C dx \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - i(x+dx, t) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial i}{\partial x} \quad (b)$

b) * $\frac{\partial(a)}{\partial t} - \frac{\partial(b)}{\partial x} : 0 = -L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{1}{C} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{th. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

* $\frac{1}{L} \frac{\partial(a)}{\partial x} - C \frac{\partial(b)}{\partial t} : \frac{1}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ ou $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{th. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Solution générale : Ondes linéaires d'une onde progressive dans le sens des x croissants et d'une autre dans le sens des x décroissants : $u(x, t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$

2 a) $u(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)}$, solution harmonique conforme à ce qui précède. La notation complexe est licite car le système est régi par une équation différentielle linéaire. De plus, les lois de Kirchhoff sont utilisables si $dx \ll \lambda$

D'après (a) : $-L \frac{\partial i}{\partial t} = jk (-A e^{-jkx} + B e^{jkx}) e^{j\omega t}$

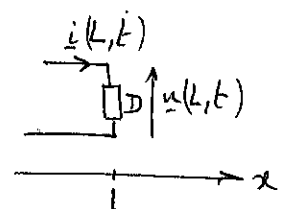
d'où $i(x, t) = -\frac{k}{L\omega} (-A e^{-jkx} + B e^{jkx}) e^{j\omega t}$ or $k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{LC}$

$i(x, t) = -\frac{1}{Z_c} (-A e^{-jkx} + B e^{jkx}) e^{j\omega t}$

b) Conditions limites

* $u(0, t) = u_0 e^{j\omega t} = (A+B) e^{j\omega t} \Rightarrow B = u_0 - A$

* $Z(L, t) = \frac{u(L, t)}{i(L, t)} = -Z_c \frac{A e^{-jkl} + B e^{jkl}}{B e^{jkl} - A e^{-jkl}}$
 $= Z_c \frac{A(e^{-jkl} - e^{jkl}) + u_0 e^{jkl}}{A(e^{-jkl} + e^{jkl}) - u_0 e^{jkl}}$



$$\underline{Z}(L,t) = \underline{Z}_c \frac{-2jA \sin(kL) + \mu_0 e^{jkL}}{2A \cos(kL) - \mu_0 e^{jkL}} = \underline{Z}_D$$

$$\frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} (2A \cos(kL) - \mu_0 e^{jkL}) = -2jA \sin(kL) + \mu_0 e^{jkL}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\mu_0 e^{jkL} (1 + \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c})}{2 \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \cos(kL) + 2j \sin(kL)}$$

$$B = \mu_0 - A = \frac{\mu_0 \left(\frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \cos(kL) + j \sin(kL) \right) - \mu_0 e^{jkL} \left(1 + \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \right)}{2 \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \cos(kL) + 2j \sin(kL)}$$

$$B = \mu_0 \frac{e^{-jkL} \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} - 1}{2 \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \cos(kL) + 2j \sin(kL)}$$

$$\underline{u}(x,t) = \mu_0 \frac{e^{j\omega t}}{2 \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \cos(kL) + 2j \sin(kL)} \left[\left(1 + \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \right) e^{-jk(x-L)} + \left(\frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} - 1 \right) e^{jk(x-L)} \right]$$

$$\underline{i}(x,t) = -\frac{\mu_0}{\underline{Z}_c} \frac{e^{j\omega t}}{2 \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \cos(kL) + 2j \sin(kL)} \left[-\left(1 + \frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} \right) e^{-jk(x-L)} + \left(\frac{\underline{Z}_D}{\underline{Z}_c} - 1 \right) e^{jk(x-L)} \right]$$

c) Pas d'onde réfléchi $\Rightarrow B=0 \Rightarrow \underline{Z}_D = \underline{Z}_c$

L'impédance de la charge (dipôle D) vaut celle de la ligne.
Ceci est une adaptation d'impédance.

$$\begin{cases} \underline{Z}_D = R \\ \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = L_c = \frac{C}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = \frac{R}{c} \\ C = (cR)^{-1} \end{cases}$$

$$L = 2,00 \mu\text{H m}^{-1}$$

$$C = 5,56 \text{ pF m}^{-1}$$

