

40102 - Corde vibrante - Différentes conditions limites

1. a) La fente en $x=L$ empêche un mouvement transversal selon (Oy) .
Donc : $\boxed{y(L,t) = 0}$

b) $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$ où $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où μ : masse linéique de la corde.

c) Compte tenu de l'existence d'une condition limite en $x=L$, il s'établit sur la corde la superposition d'ondes de pulsations ω se propageant en sens inverse :

Soit en notation complexe : $\boxed{y(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} + \underline{B} e^{i(\omega t + kx)}}$

C.L. : $y(L,t) = 0 = (A e^{-ikL} + \underline{B} e^{ikL}) e^{i\omega t} \quad \forall t$

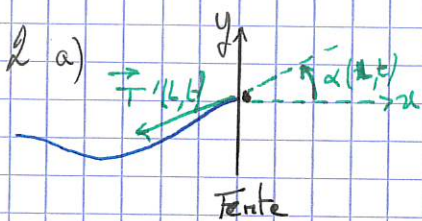
$\Rightarrow \underline{B} = -A e^{-2ikL}$

soit $y(x,t) = A (e^{i(\omega t - kx)} - e^{-2ikL} e^{i(\omega t + kx)})$

$= A e^{-ikL} (e^{-ik(x-L)} - e^{ik(x-L)}) e^{i\omega t}$

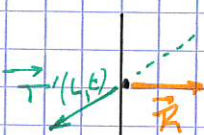
$= -2i A e^{-ikL} \sin(k(x-L)) e^{i\omega t} = -2i A \sin(k(x-L)) e^{i(\omega t - kL)}$

$\Rightarrow \boxed{y(x,t) = \text{Re}(y(x,t)) = 2A \sin(k(x-L)) \sin(\omega t - kL)}$ onde stationnaire



$\vec{T}'(L,t) = \begin{vmatrix} -T \cos(\alpha(L,t)) \\ -T \sin(\alpha(L,t)) \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} -T \\ -T \frac{\partial y}{\partial x}(L,t) \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{T_y' = -T \frac{\partial y}{\partial x}(L,t)}$



Système : bille ($m=0$)
Référentiel : lié à la fente, galiléen
Forces : $\vec{T}'$; $\vec{R}$: réaction normale de la fente, car pas de frottement.

P.F.D. : $0 \cdot \vec{a} = \vec{T}' + \vec{R}$

Projection selon $\vec{e}_y$: $0 = T_y' \Rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = 0}$: Condition limite

b) $y(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} + \underline{B} e^{i(\omega t + kx)}$

$\frac{\partial y}{\partial x} = ik(-A e^{-ikx} + \underline{B} e^{ikx}) e^{i\omega t}$

C.L. : $\frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = 0 \Rightarrow \underline{B} = A e^{-2ikL}$

$\Rightarrow y(x,t) = A e^{i\omega t - ikL} (e^{-ik(x-L)} + e^{ik(x-L)}) = 2A e^{i(\omega t - kL)} \cos(k(x-L))$

soit $\boxed{y(x,t) = \text{Re}(y(x,t)) = 2A \cos(\omega t - kL) \cos(k(x-L))}$