P01008 - Corde avec frottement

1 - $Re = \dfrac{\mu/S \cdot v \cdot D}{\eta}$ où $v \simeq a.f$ $\Rightarrow Re = \dfrac{\mu \cdot a f D}{\pi a^2 \eta} \rightarrow \boxed{Re = \dfrac{\mu f D}{\pi a \eta}}$

$Re = \dfrac{10^{-2} \cdot 10^2 \cdot 10^{-3}}{\pi 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{1}{6} 10^5 \simeq 2\, 10^4 \gg 2000 \Rightarrow$ Régime turbulent donc la force de frottement est plutôt quadratique.

2 - PFD appliqué à l'élément de corde $[x, x+dx]$:

$\mu dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e_y} = \vec{T_d}(x+dx,t) + \vec{T_g}(x,t) + d\vec{F}$ où $\vec{T_g} = -\vec{T_d}$ (3^e loi de Newton)

Projection selon : $\mu\, dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\dfrac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t) - \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right] - h \dfrac{\partial y}{\partial t} dx$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \dfrac{T}{\mu}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{h}{\mu}\dfrac{\partial y}{\partial t} = 0}$ Eq$^\circ$ d'onde ; $\dfrac{T}{\mu} = c^2$; $\dfrac{h}{\mu} = \alpha$

3 - $\underline{y}(x,t) = a e^{i(\omega t - \underline{k} x)}$ solution que l'on injecte dans l'équation d'onde

$-\omega^2 + c^2 \underline{k}^2 + i\omega\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - i\dfrac{\omega\alpha}{c^2}}$ $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\dfrac{h}{\mu\omega}\right)$

4 - $\underline{k} \overset{DL}{=} \dfrac{\omega}{c}\left(1 - i\dfrac{h}{2\mu\omega}\right)$ car $h \ll \mu\omega$. $\Rightarrow$ $\boxed{k_1 = \dfrac{\omega}{c} \quad k_2 = \dfrac{-h}{2\mu c}}$

5 - * Milieu non dispersif car $v_\varphi = \dfrac{\omega}{Re\, \underline{k}} = cte$

* Milieu absorbant car $k_2 < 0$

* $\underline{y}(x,t) = a\, e^{i(\omega t - k_1 x)} e^{k_2 x} \Rightarrow \boxed{y = Re\, \underline{y} = a e^{-k_2 x} \cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right)}$

6 - Puissance dissipée sur l'élément de corde : $dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = -h v^2 dx$

où $v = \dfrac{\partial y}{\partial t} = -\omega a e^{-k_2 x} \sin\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right)$

$\dfrac{dP}{dx} = -h\omega^2 a^2 e^{-2k_2 x} \sin^2\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right)$

$\boxed{\left\langle \dfrac{dP}{dx} \right\rangle_t = -\dfrac{1}{2} h\omega^2 a^2 e^{-2k_2 x}}$