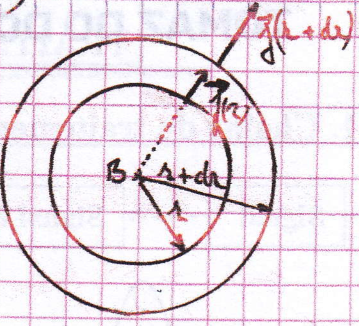
ORTH 34 - **CROISSANCE ET ASCENSION D'UN BULLE DE CHAMPAGNE** (Centrale - Supélec - PC)

1. Bilan de molécules de CO_2 dans la couronne sphérique, pendant dt



$$\delta N_e = \vec{j}(r).\vec{u}_r . 4\pi r^2 dt - \vec{j}(r+dr).\vec{u}_r \, 4\pi(r+dr)^2 dt$$

$$\boxed{\delta N_e = -\frac{\partial r^2 j}{\partial r} 4\pi \, dt \, dr}$$

2. En régime stationnaire $\delta N_e = 0 \rightarrow \frac{\partial r^2 j}{\partial r} = 0$

Loi de Fick : $\vec{j} = -D \, \vec{grad}(C(r))$ $= -D\frac{\partial C(r)}{\partial r}\vec{u}_r$, d'où $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial C(r)}{\partial r}\right) = 0$

que l'on intègre deux fois : $r^2 \frac{\partial C(r)}{\partial r} = A_1 \rightarrow \frac{\partial C(r)}{\partial r} = \frac{A_1}{r^2}$

$\rightarrow C(r) = -\frac{A_1}{r} + \alpha$. Posons $A_1 = -\beta \Rightarrow \boxed{C(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}}$

3. Conditions limites : $C(r \rightarrow \infty) = \frac{\chi p_i}{k_B T} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\chi p_i}{k_B T}}$

$C(r = a) = \frac{\chi p_e}{k_B T} = \frac{\chi p_i}{k_B T} + \frac{\beta}{a} \rightarrow \boxed{\beta = a\frac{\chi}{k_B T}(p_e - p_i)}$

4. Soit δN_g : nombre de molécules de CO_2 entrant dans la bulle pendant dt.

$$\delta N_g = \vec{j}(r=a).4\pi a^2 dt (-\vec{u}_r) = +D.4\pi a^2 \frac{\partial C}{\partial r}(a) \, dt = -D 4\pi a^2 \frac{\beta}{a^2} dt$$

$\Rightarrow \delta N_g = -4\pi D \frac{a\chi}{k_B T}(p_e - p_i) dt$ où $\delta N_g = dN_g$: variation du nombre de molécules de CO_2 dans la bulle pendant dt.

D'où $\boxed{\frac{dN_g}{dt} = 4\pi D \frac{a\chi}{k_B T}(p_i - p_e)}$

5. Appliquons la loi des gaz parfaits au CO_2 dans la bulle de rayon $a(t)$.

$p_e . \frac{4}{3}\pi a^3 = N_g k_B T \rightarrow N_g = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{p_e}{k_B T} \rightarrow \frac{dN_g}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt} \frac{p_e}{k_B T}$

Soit en égalisant avec la relation du 4 : $4\pi D \frac{a\chi}{k_B T}(p_i - p_e) = 4\pi a^2 \dot{a} \frac{p_e}{k_B T}$

$$\rightarrow \boxed{a(t).\dot{a}(t) = D\chi\left(\frac{p_i}{p_e} - 1\right) = K} \quad (1)$$

$[a\dot{a}] = L^2 T^{-1}$; $[D] = L^2 T^{-1}$; $[\chi] = 1$ donc (1) est homogène.

6. $a\dot{a} = \frac{1}{2}\frac{da^2}{dt} = K \rightarrow a^2(t) - a^2(0) = 2Kt \Rightarrow \boxed{a(t) = \sqrt{a^2(0) + 2Kt}}$

* $K = DX\left(\frac{p_i}{p_e} - 1\right) = 4{,}2\ 10^{-9} \simeq 4\ 10^{-9}\ m^2 s^{-1}$

* $a_1^2 - a_0^2 = 2K\tau_1 \rightarrow \boxed{\tau_1 = \frac{a_1^2 - a_0^2}{2K}}$ $\quad \tau_1 \simeq \frac{a_1^2}{2k} = \frac{0{,}1}{8}$

$\underline{\tau_1 \simeq 13\ ms}$

71. Poids de la bulle : $\vec{P} = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_{CO_2}\vec{g}$ où $\mu_{CO_2} = \frac{p_e M_{CO_2}}{RT} \simeq 2\ kg\,m^{-3}$

Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi a^3 \mu\,\vec{g}$

Or $\mu \gg \mu_{CO_2}$ donc on négligera le poids de la bulle devant la poussée d'Archimède.

72. En négligeant la variation de quantité de mouvement de la bulle, donc son accélération, on considère qu'elle a atteint sa vitesse limite U, donc que $\vec{\Pi}$ équilibre $\vec{F}$.

Soit $\frac{4}{3}\pi a^3 \mu g = 6\pi\eta a U \rightarrow \boxed{U = \frac{2}{9}\frac{a^2\mu g}{\eta}}$

73. $\underline{U = 22\ mm\,s^{-1}}$