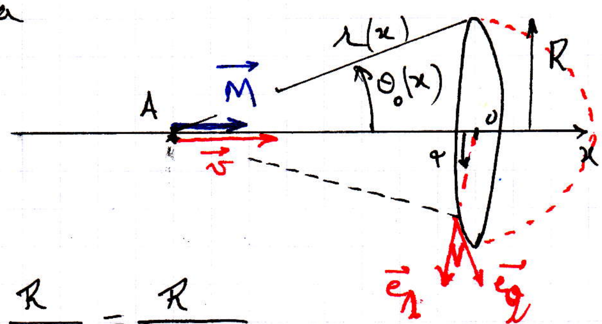
OREM 318 - Interaction aimant-spire

Analyse : L [illegible] de l'aimant fait varier le flux magnetique à travers la spire. Cela génère une f.é.m induite et un courant induit.
Ce courant plongé dans le champ magnétique de l'aimant génère une force de Laplace sur la spire.
La loi de modération de Lenz permet d'affirmer que cette force sera dirigée selon (Ox)

Champ du dipôle : $\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right)$ en coordonnées sphériques.

Flux de $\vec{B}$, à travers la spire et donc la calotte sphérique s'appuyant sur la spire.

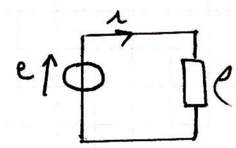


$$\phi = \iint_{\text{calote sphérique}} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \frac{\mu_0 M r^2}{4\pi r^3(x)}\int_{\theta=0}^{\theta_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$\phi = \frac{\mu_0 M}{2r(x)}\sin^2\theta_0(x) \quad \text{où} \quad \sin\theta_0(x) = \frac{R}{r(x)} = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\phi = \frac{\mu_0 M R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}}$$

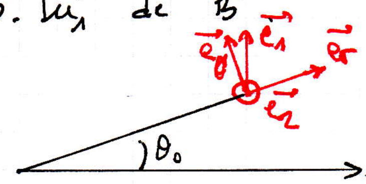
Loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dx} = -\frac{3\mu_0 M R^2 x v}{2(x^2+R^2)^{5/2}}$



$$e = \rho i \Rightarrow \boxed{i = -\frac{3\mu_0 M R^2 x v}{2\rho(x^2+R^2)^{5/2}}}$$

Force de Laplace subie par la spire : $\vec{F_\mathcal{L}} = \oint i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$ où $\vec{dl} = R\,d\alpha\,\vec{e_2}$

Or $\vec{e_2}\wedge\vec{e_1} = -\vec{e_x}$; La force longitudinale de Laplace est donc due à la composante $\vec{B}.\vec{u_1}$ de $\vec{B}$



$\vec{e_r}.\vec{e_1} = \sin\theta_0$; $\vec{e_\theta}.\vec{e_1} = \cos\theta_0$

$$B_1 = \vec{B}.\vec{e_1} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta_0\sin\theta_0 + \sin\theta_0\cos\theta_0\right)$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\mu_0 M\sin\theta_0\cos\theta_0}{\pi r^3} = -\frac{3}{4}\frac{\mu_0 M x R}{\pi r^5} \quad \text{où} \quad \cos\theta_0 = \frac{-x}{r}$$

$$F_{\mathcal{L},x} = \vec{F_\mathcal{L}}.\vec{e_x} = \int_0^{2\pi} i R B_1\,d\alpha \Rightarrow F_{\mathcal{L},x} = \frac{9\mu_0^2 M^2 R^4 x^2 v}{4\rho(x^2+R^2)^5} > 0$$ conforme au préambule. :)

Force subit par le dipôle : 3e loi de Newton : $F_{dip} = -F_{\mathcal{L},x}$.

$$\rightarrow \boxed{F_{dip} = -\frac{9\mu_0^2 M R^4 x^2 v}{4\rho(x^2+R^2)^5}}$$

2e méthode :

Energie potentiel du dipôle dans le champ de la spire

$$E_p = -\vec{M}\cdot\vec{B}_{sp} \quad \text{où} \quad \vec{B}_{sp} = -\frac{\mu_0 i}{2R}\sin^3\theta_0\,\vec{e_x} = -\frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Force subie par le dipôle : $\vec{F}_{dip} = -\vec{grad}\left(-\vec{M}\vec{B}_{sp}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{M}\cdot\vec{B}_{sp}\right)\right)_{i=cte}\vec{e_x}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{dip} = -\frac{9\mu_0^2 M^2 R^4 x^2 v}{4\rho\,(x^2+R^2)^5}\,\vec{e_x}}$$