

MFS18 - Etallement d'un coin liquide

1 - x Echelle selon ou de variation du champ de vitesse : L

$$x \text{ ————— } O_y \text{ ————— } : H \approx \partial L \ll L$$

x Durée typique de variation du champ de vitesse : T.

x Vitesse typique : V

Eq⁰ de N.S. $\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad } p + \mu \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$

Projection $\left| \begin{aligned} \mu \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \mu g \end{aligned} \right.$

En ordres de grandeur

$$\left| \begin{aligned} \mu \frac{V}{T} + \mu \frac{V^2}{L} &\approx -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{\eta \frac{V}{L^2}} + \eta \frac{V}{H^2} \\ 0 &\approx -\frac{\partial p}{\partial z} - \mu g \quad \text{neg} \end{aligned} \right.$$

Nombre de Reynolds : $Re = \frac{\mu (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}}{\eta \Delta \vec{v}} = \frac{\mu V^2/L}{\eta V/H^2} = \frac{\mu V}{\eta} \frac{H^2}{L}$

* Pour négliger le terme convectif on travaille à $Re \ll 1 \rightarrow \frac{\mu V}{\eta} \frac{H^2}{L} \ll 1$

* Pour négliger l'accélération locale : $\frac{\mu V}{T} \ll \eta \frac{V}{H^2} \rightarrow T \gg \frac{\mu H^2}{\eta} = \frac{H^2}{\gamma}$; durée diffusion gte de surf sur l'épaisseur de la goutte

$$\rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} & (a) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \mu g & (b) \end{cases}$$

2 - Intégrons (b) : $p(z) = -\mu g z + f(x)$

C.L. $p(z=h(x,t)) = -\mu g h(x,t) + f(x) = p_0 \rightarrow f(x) = p_0 + \mu g h(x,t)$

$$\hookrightarrow p(z) = p_0 + \mu g (h(x,t) - z)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = +\mu g \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow (a) \text{ devient } 0 = -\mu g \frac{\partial h}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (c)$$

3 - x Intégrons (c) : $\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \mu g z \frac{\partial h}{\partial x} + C(x,t)$

x Contrainte nulle à l'interface air-liquide : $\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} (z=h(x)) = 0 \rightarrow -\mu g h \frac{\partial h}{\partial x} = C(x)$

$$\hookrightarrow \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \mu g (z-h) \frac{\partial h}{\partial x}$$

x On intègre : $\eta v_x = \mu g z (z-h) \frac{\partial h}{\partial x} + D(x)$

C.L. Adhérence en $z=0$: $D(x) = 0 \rightarrow v_x = \frac{\mu g}{\eta} z (z-h) \frac{\partial h}{\partial x}$

$$4 - Q = \int_0^h v_x dz = \frac{\mu g}{\eta} \int_0^h \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) \frac{dh}{dz} dz = \frac{\mu g}{\eta} \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{2} \right) \frac{dh}{dz} = -\frac{\mu g}{\eta} \times \frac{1}{3} h^3 \frac{dh}{dz}$$

$$Q = -\frac{\mu g}{3\eta} h^3 \frac{dh}{dz}$$

$$5 - a) Q \approx \frac{\mu g H^4}{\eta R} \quad \text{car } \frac{\partial h}{\partial x} \approx -\frac{H}{R}$$

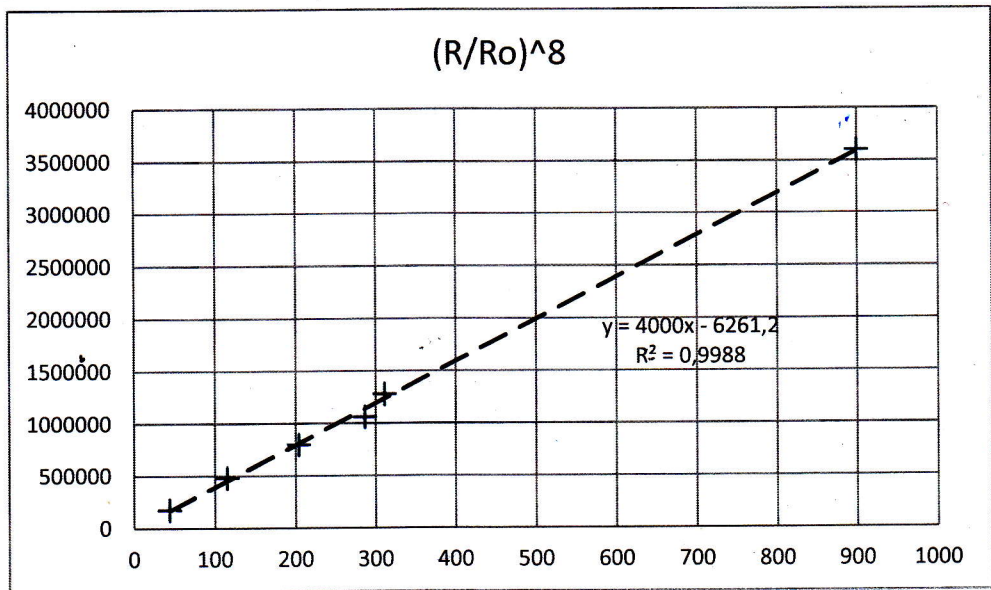
$$b) 2\pi R Q = 2\pi R \int_0^H v_x dz \approx 2\pi R \int_0^H \dot{\gamma} dz \rightarrow Q \approx \dot{\gamma} H$$

$$c) H \approx \frac{V}{R^2} \rightarrow Q \approx \frac{\mu g V^4}{\eta R^3} = \dot{\gamma} \frac{V}{R^2} \rightarrow R^7 \dot{\gamma} \approx \frac{\mu g V^3}{\eta}$$

$$\text{soit } \frac{1}{8} \frac{dR^8}{dt} \approx \frac{\mu g V^3}{\eta} \rightarrow R^8 \approx \frac{8\mu g V^3}{\eta} t + R_0^8$$

$$d) \text{Trasaus } \frac{R^8}{R_0^8} = f(t) \quad \left(\frac{4}{3} \pi R_0^3 = V \right) \rightarrow R_0 = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} = 1,5 \text{ mm}$$

R/Ro	t(s)	(R/Ro)^8
4,53	43,8	178378
5,13	115,1	482165
5,47	203,9	797592
5,67	286,6	1063216
5,80	311	1280631
6,60	899,6	3600406



Points alignés $\rightarrow$ modèle valide.