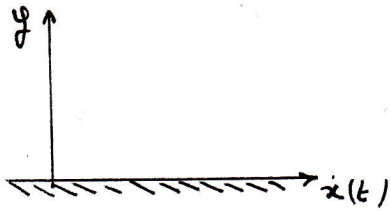


MF502 - Écoulement entraîné par un plan oscillant : onde de cisaillement



1 - La viscosité du fluide amortit ses mouvements par dissipation d'énergie cinétique au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la source du mouvement en $y=0$.

$$2 - \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = - \text{grad } P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Projection selon $\vec{e}_x$: $\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ (X)

$\vec{e}_y$: $0 = - \frac{\partial P}{\partial y} - \rho g$ (Y)

$\vec{e}_z$: $0 = - \frac{\partial P}{\partial z}$ (Z)

(Z) : P indépendant de z

(Y) : $P = - \rho g y + f(x)$

(X) : $\frac{\partial P}{\partial x} = - \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ est une fonction de y et t

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0$$

Sans autre donnée sur le champ de pression, supposons $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.
On peut tenter une justification en considérant la continuité de la pression à la surface libre du liquide, où règne $P = P_0$
d'où $f(x) = P_0$

(X) : $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

3. Injection la solution en notation complexe $\vec{v} = \underline{f}(y) e^{i(\omega t)}$
où $\underline{f}(y) = f(y) e^{i \varphi(y)}$

$i \omega \underline{f}(y) = \eta \underline{f}''(y)$

$\underline{f}''(y) - i \frac{\omega}{\eta} \underline{f}(y) = 0$

$\eta = \frac{\eta}{\rho}$

$\Rightarrow \underline{f}(y) = \beta \exp\left(\pm \frac{(1+i)\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}} y\right)$ On garde la solution amortie

$\underline{f}(y) = \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} y\right) \exp\left(-i \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} y\right)$

$\Rightarrow f(y) = |\underline{f}(y)| = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} y}$

$\varphi(y) = \arg(\underline{f}(y)) = -\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}} y$

4. Posons l'échelle de longueur $\lambda = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega}}$

$v = \beta e^{-y/\lambda} \cos(\omega t - y/\lambda)$

Condition limites : $v(0, t) = \dot{x}(t) = \omega A \cos \omega t = \beta \cos(\omega t) \Rightarrow \beta = A \omega$

(con) A.N : $\lambda = 0,44 \text{ mm}$ donc pas d'écoulement au delà de $5\lambda \approx 2 \text{ cm}$.
Pas d'onde de cisaillement dans les fluides. Possibles dans les solides (séismes).