

MF413 - Écoulement incompressible dans une conduite de section variable

1. * Écoulement incompressible

conservation du débit volumique.

* Dans les zones de l'écoulement où les l.d.c. sont parallèles, le champ de vitesse est uniforme.

Donc $Q_V = v_{A'} S = v_{B'} A \Rightarrow$

$$\frac{v_{B'}}{v_{A'}} = \frac{S}{A} > 1$$

* l.d.c. A'B' : Relation de Bernoulli : $P_{A'} + \frac{1}{2} \rho v_{A'}^2 = P_{B'} + \frac{1}{2} \rho v_{B'}^2 + \rho g(z_{B'} - z_{A'})$

on néglige en général $\rho g(z_{B'} - z_{A'})$ devant $\rho v_{B'}^2$

$$\Rightarrow P_{A'} + \frac{1}{2} \rho v_{A'}^2 = P_{B'} + \frac{1}{2} \rho v_{B'}^2 \quad \text{Comme } v_{B'} > v_{A'} \quad \text{alors } P_{B'} < P_{A'}$$

Donc la hauteur de fluide $z_{B''} - z_{B'} < z_{A''} - z_{A'}$

2. Champ de pression hydrostatique dans les cheminées

$$P_0 + \rho g z_{A''} = P_{A'} + \rho g z_{A'}$$

$$P_0 + \rho g z_{B''} = P_{B'} + \rho g z_{B'}$$

$$\rho g(z_{A''} - z_{B''}) = P_{A'} - P_{B'} + \rho g(z_{A'} - z_{B'})$$

$$\rho g h = \frac{1}{2} \rho (v_{B'}^2 - v_{A'}^2) = \frac{1}{2} \rho Q_V^2 \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{S^2} \right)$$

$$\Rightarrow Q_V = \sqrt{2gh \left(\frac{S^2 S^2}{S^2 - A^2} \right)}$$

Pour aller plus loin, nous avons à négliger $\rho g(z_{A'} - z_{B'})$

* l.d.c. AB : $z_A = z_B \Rightarrow$ Relation de Bernoulli $P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$ (5)

* Dans les zones d'écoulement uniforme, $\text{rot } \vec{v} = 0$

* Écoulement stationnaire $\rho \text{grad } \frac{v^2}{2} = -\text{grad } P + \rho \vec{g}$

* Intégration $\int_{AA'} \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) d\vec{\ell} = - \int_{AA'} \text{grad } P \cdot d\vec{\ell} + \int_{AA'} \rho \vec{g} \cdot d\vec{\ell}$

$$0 = -(P_{A'} - P_A) - \rho g(z_{A'} - z_A) \Rightarrow P_{A'} - P_A = -\rho g(z_{A'} - z_A) \quad (1)$$

* De même : $P_{B'} - P_B = -\rho g(z_{B'} - z_B) \quad (2)$

* Hydrostatique : $P_0 - P_{A'} = -\rho g(z_{A''} - z_{A'}) \quad (3)$

$P_0 - P_{B'} = -\rho g(z_{B''} - z_{B'}) \quad (4)$

$$(1) + (3): \quad P_0 - P_A = -\rho g (z_A'' - z_A)$$

$$(2) + (4): \quad P_0 - P_B = -\rho g (z_B'' - z_B)$$

$$\ominus \quad P_A - P_B = +\rho g (z_B'' - z_A'')$$

$$P_A - P_B = \rho g h$$

$$\text{dans (5):} \quad \rho g h = \frac{1}{2} (\rho v_B^2 - \rho v_A^2)$$