MF404 - Le chant des bulles

1. Loi de Laplace : $p_0\left(\frac{4}{3}\pi R_0^3\right)^\gamma = p(R_0,t)\left(\frac{4}{3}\pi (R_0+\xi)^3\right)^\gamma$

$$= p(R_0,t)\left(\frac{4}{3}\pi R_0^3\right)^\gamma \left(1+\frac{\xi}{R_0}\right)^{3\gamma}$$

$$p_0 \simeq p(R_0,t)\left(1+3\gamma\frac{\xi}{R_0}\right) \longrightarrow \boxed{p(R_0,t) = p_0\left(1-3\gamma\frac{\xi}{R_0}\right)}$$

2. Conservation du débit volumique de l'écoulement incompressible :

$$Q_v(R,t) = Q_v(r>R,t) \quad ; \quad 4\pi R^2 \underbrace{v(R,t)}_{\frac{dR}{dt}=\frac{d\xi}{dt}} = 4\pi r^2 v(r,t)$$

$$\longrightarrow \boxed{v(r,t) = \frac{R_0^2}{r^2}\dot{\xi}} \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre..}$$

3. Equation d'Euler : $\mu_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \mu_0(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v} = -\vec{\text{grad}}\,p$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{R_0^2}{r^2}\ddot{\xi}\,\vec{u}_r$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v} = \left(v\,\vec{u}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)v(r,t)\vec{u}_r = -2\frac{R_0^4}{r^5}\dot{\xi}^2\,\vec{u}_r \quad \text{du } \underline{\underline{2^e \text{ ordre}}} \text{ en } \frac{|\xi|}{R_0}$$

car $\dot{\xi} \simeq \frac{\xi}{T}$ (T: période des oscillations de la bulle)

$$\hookrightarrow -\frac{\partial p}{\partial r} = \mu_0\frac{R_0^2}{r^2}\ddot{\xi} \xrightarrow{\int} p(r,t) = +\mu_0\frac{R_0^2}{r}\ddot{\xi} + Cte$$

$\underline{\text{C.L}}$: Loin de la bulle $p \xrightarrow[r\to\infty]{} p_0 \Rightarrow Cte = p_0$

D'où $\boxed{p(r,t) = p_0 + \mu_0\frac{R_0^2}{r}\ddot{\xi}}$

4. Continuité de la pression en $r = R$: $p_0\left(1-3\gamma\frac{\xi}{R_0}\right) = p_0 + \mu_0 R_0\ddot{\xi}$

$$\hookrightarrow \boxed{\ddot{\xi} + \frac{3\gamma p_0}{\mu_0 R_0^2}\xi = 0} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\mu_0 R_0^2}}}$$

5. On mesure $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\,10^{-3}}{9} = 0{,}44$ ms $\longrightarrow$ $\omega_0 = 1{,}4\,10^4$ rad s^{-1}

$\underline{R_0 = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\mu_0\omega_0^2}}}$ $\quad \underline{R_0 = 1{,}5\text{ mm}}$ $\qquad f_0 = 2{,}2$ kHz

6 (a) $\lambda = c\,T_0 = 67$ cm.

(b) $D_e \simeq \frac{\delta^2}{T_0} \longrightarrow \boxed{\delta = \sqrt{D_e\cdot T_0}}$

(c) $\frac{\lambda}{R_0} = \frac{c\,T_0}{R_0} = 4{,}6\,10^2 \longrightarrow \lambda >> R_0 \longrightarrow$ L'onde acoustique s'étend sur une grande zone aqueuse au cours d'une période, donc rayonnement non négligeable

$\frac{\delta}{R_0} = 5{,}6\,10^{-3} \longrightarrow \delta << R_0$

$\hookrightarrow$ diffusion thermique sur très faible épaisseur d'eau donc faible perte d'énergie : négligeable.

La perte d'énergie par rayonnement acoustique entraîne un amortissement des oscillations de la bulle, ce que l'on observe sur l'enregistrement.