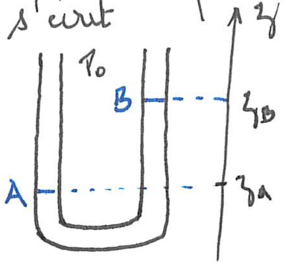
MF402 - Oscillation dans un tube en U

1. Fluide parfait incompressible à l'équilibre ("écoulement stationnaire") dans le référentiel galiléen du laboratoire → la relation de Bernoulli s'écrit

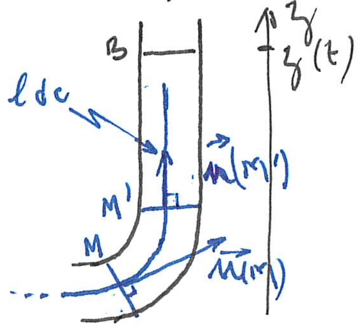


$$P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B$$

Par continuité de la pression en A et B : $P_A = P_B = P_0$

D'où $\underline{z_A = z_B}$. Posons $z_A = z_B = 0$ à l'équilibre

2. Justifions d'abord que la vitesse du fluide est uniforme le long d'une ligne de courant parallèle aux génératrices du tube



Considérons le tube de courant entre M et M'. Les normales locales aux sections du tube en M et M' sont $\vec n(M)$ et $\vec n(M')$.

La conservation du débit volumique des fluides incompressibles amène $\vec v(M).S\vec n(M)$

$$\vec v(M).S.\vec n(M) = \vec v(M').S\vec n(M')$$

La l.d.c. étant parallèle aux génératrices du tube on déduit $v(M) = v(M')$. Si $M' = B$, on note $v(B) = \dot z$

Donc v est uniforme dans le tube et $\underline{v = \dot z}$

Equation d'Euler intégrée de A à B : $\displaystyle\int_{AB} \frac{\partial \vec v}{\partial t}\, d\vec l + \left[\frac{v^2}{2} + gz\right]_A^B = -\frac{1}{\rho}\left[P\right]_A^B$

$$\int_{AB} \frac{\partial \vec v}{\partial t}\, d\vec l = \int_{AB} \ddot z \vec n . dl \vec n = L \ddot z$$

$$\left[\frac{v^2}{2} + gz\right]_A^B = 0 + g(z_B - z_A)$$

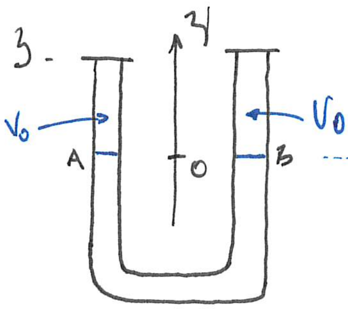
La conservation du volume dans ce tube de section constante impose $z_A = -z_B = -z(t)$.

$$\left[P\right]_A^B = 0$$

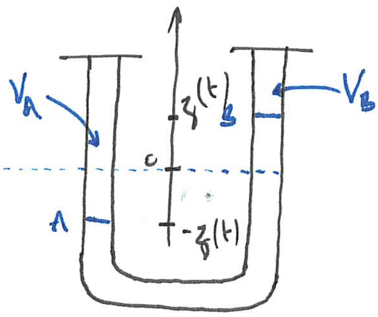
D'où $$\boxed{\ddot z + \frac{2g}{L} z = 0}$$

Admet des solutions oscillantes harmoniques de période $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}}$ $\underline{T = 0{,}63\ s}$

3.



Equilibre



Instant t

$$V_A(t) = V_0 + z(t).S$$
$$V_B(t) = V_0 - z(t).S.$$

Petites oscillations : $z(t)S \ll V_0$.

a) Transformation isotherme : $nRT_0 = P_A V_A = P_B V_B = P_0 V_0$

$$\Rightarrow P_A = P_0 \frac{1}{1 + \frac{Sz}{V_0}} \underset{DL}{\simeq} P_0\left(1 - \frac{Sz}{V_0}\right) \ ; \ P_B = P_0 \frac{1}{1 - \frac{Sz}{V_0}} \underset{DL}{\simeq} P_0\left(1 + \frac{Sz}{V_0}\right)$$

Reprenons l'équation d'Euler intégrée de la question 2 :

$$\ddot{z} L + 2 g z = -\frac{1}{\rho}(P_B - P_A)$$

$$= -\frac{P_0}{\rho}\,\frac{2 S z}{V_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{2}{L}\left(g + \frac{P_0 S}{\rho V_0}\right) z = 0}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + \frac{P_0 S}{\rho V_0}}}$$

b) Transformation adiabatique réversible.

Loi de Laplace : $P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$

$$\Rightarrow P_A = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{S z}{V_0}\right)^{\gamma}} \underset{DL}{\simeq} P_0\left(1 - \frac{\gamma S z}{V_0}\right)$$

$$P_B = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{S z}{V_0}\right)^{\gamma}} \underset{DL}{\simeq} P_0\left(1 + \frac{\gamma S z}{V_0}\right)$$

De même l'équation du mouvement devient $\boxed{\ddot{z} + \frac{2}{L}\left(g + \frac{\gamma P_0 S}{\rho V_0}\right) z = 0}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + \frac{\gamma P_0 S}{\rho V_0}}}$$