

MF206. Vortex dans la rivière

1. Écoulement incompressible $\Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$ i.e. $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

$$\begin{aligned} * \frac{\partial v_x}{\partial x} &= K \left(1 - \frac{xL}{(x+y)^2} \right) - Kx \frac{-(x+y)^2 - 2xL(x+y)}{(x+y)^4} \\ &= K \left[1 - \frac{xL}{(x+y)^2} - xL \frac{y-x}{(x+y)^3} \right] = K \left[1 - Lx \frac{x+y+y-x}{(x+y)^3} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = K \left[1 - \frac{2Lxy}{(x+y)^3} \right]$$

* $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ s'obtient en remplaçant K par $-K$ dans le résultat précédent, x et y ayant des rôles équivalents dans v_x et v_y .

$$\Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = -K \left[1 - \frac{2Lyx}{(x+y)^3} \right]$$

D'où $\text{div } \vec{v} = 0$

2. Vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = - \frac{2Ky^2L}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = + \frac{2Kx^2L}{(x+y)^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v_y}{\partial x} = - \frac{2Ky^2L}{(x+y)^3} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} = + \frac{2Kx^2L}{(x+y)^3} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\Omega} = -KL \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} \vec{e}_z$$

3. * Sur la paroi de gauche : $\vec{v} = \begin{cases} v_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ v_y \xrightarrow{x \rightarrow 0} -Ky \left(1 - \frac{L}{y} \right) \end{cases}$

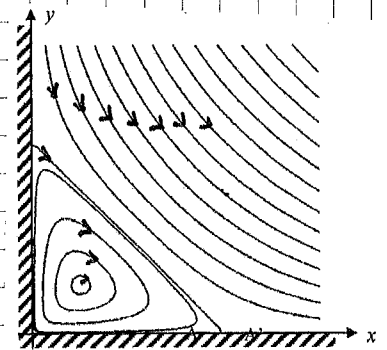
et $v_y \xrightarrow[y \gg L]{x \rightarrow 0} -Ky < 0$

* Dans le vortex $\oint \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$

* Au centre du vortex : $\vec{v} = \vec{0}$

soit en $C \left(\frac{L}{4} ; \frac{L}{4} \right)$

$$4. \quad T = \frac{2\pi}{|\Omega(C)|} ; \quad \Omega(C) = -K \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{K}$$



zone vortex.