ME246 - <u>Equilibre relatif.</u> $\mathcal{R}$: ref. lié à $(Oxyz)$ galiléen

1. <u>Méthode énergétique</u> $\mathcal{R}'$: ref. lié à $(Ox'y'z)$ <u>NON galiléen</u>

E'_p : energie potentielle dans $\mathcal{R}'$

<u>Force dans $\mathcal{R}'$</u> : Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Rappel : $\vec{F}_{él} = -k(l-l_0)\vec{e}_{x'}$

$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 l\, \vec{e}_{x'}$

$$E'_p = E'_p(\vec{F}_{él}) + E'_p(\vec{F}_{ie}) + E'_p(\vec{P})$$

$$E'_p = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + 0$$

$$\frac{dE'_p}{dl} = k(l-l_0) - m\omega^2 l = 0 \quad \text{si} \quad \boxed{l = l_{eq} = \frac{kl_0}{k-m\omega^2}}$$

existe (i.e. $l_{eq} > 0$) ssi $\underline{k > m\omega^2}$

<u>Méthode dynamique</u>

A l'équilibre relatif : $\vec{0} = \vec{F}_{ie} + \vec{P} + \vec{F}_{él}$

Projection selon $\vec{e}_{x'}$: $0 = -k(l_{eq}-l_0) + m\omega^2 l_{eq} \Rightarrow \boxed{l_{eq} = \frac{kl_0}{k-m\omega^2}}$

2. <u>Méthode énergétique</u>

$\frac{d^2E'_p}{dl^2} = k - m\omega^2 > 0$ donc l_{eq} est une position d'<u>équilibre stable</u>.

<u>Au voisinage de l_{eq}</u> : $E'_p(l) \underset{DL_2}{\simeq} E'_p(l_{eq}) + \frac{1}{2}(l-l_{eq})^2 \frac{d^2E'_p}{dl^2}$

Système conservatif dans $\mathcal{R}'$ $\Rightarrow$ $E'_m = E'_c + E'_p = cte$ où $E'_c = \frac{1}{2}m\dot{l}^2$

D'où $\frac{dE'_m}{dt} = 0 = m\dot{l}\ddot{l} + \dot{l}(l-l_{eq})\frac{d^2E'_p}{dl^2}$

soit $\boxed{\ddot{l} + \frac{1}{m}\frac{d^2E'_p}{dl^2}(l-l_0) = 0}$ E.O.H. On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{m}\frac{d^2E'_p}{dl^2}$

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m}{k-m\omega^2}}}$$

<u>Méthode dynamique</u>

Au voisinage de l_{eq}, $l(t) = l_{eq} + \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \ll l_{eq}$

PFD dans $\mathcal{R}'$: $m\ddot{\varepsilon}\,\vec{e}_{x'} = +m\vec{g} - k(l_{eq}+\varepsilon-l_0)\vec{e}_{x'} + m\omega^2(l_{eq}+\varepsilon)\vec{e}_{x'}$

Selon $\vec{e}_{x'}$: $\boxed{\ddot{\varepsilon} + \frac{k-m\omega^2}{m}(l_{eq}+\varepsilon) = \frac{k}{m}l_0}$ E.O.H.

On retrouve $\omega_0^2 = \frac{k-m\omega^2}{m}$