

ME236 - Pendule entraînée

1. Réf lié à I NON GALILEEN

R: réf labo galiléen
R': lié à I

2. TMC ds R': $\frac{d}{dt} (\vec{r}_{M/I} \wedge m \vec{v}_M) = \vec{r}_{M/I} \wedge \vec{P} + \vec{r}_{M/I} \wedge \vec{F}_{ie}$

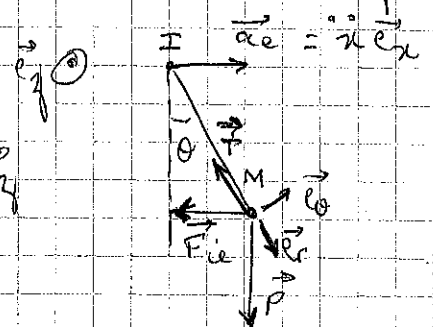
en translation rectiligne non uniforme

N.B: $\vec{F}_{ie} = \vec{0}$ car $\vec{S}_{R'/R} = \vec{0}$

$$\vec{L}_{M/I} = m l^2 \ddot{\theta} \vec{e}_y$$

TIME: $m l^2 \ddot{\theta} \vec{e}_y = -m g l \sin \theta \vec{e}_y - m \ddot{x} l \cos \theta \vec{e}_y$

Pour $\theta \ll 1$ rad: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = + \frac{\omega_0^2}{l} \cos(\omega t)$



3. Posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$; $A = \frac{\omega_0^2}{g}$ $\rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 A \cos(\omega t)$

Solution homogène: $\theta_h = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$

particulière: $\theta_p = \gamma e^{j\omega t}$, $-\omega^2 \gamma + \omega_0^2 \gamma = \omega_0^2 A$
 $\rightarrow \gamma = \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{A}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

$\rightarrow \theta(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \cos(\omega t)$ $\oplus$ si $\omega < \omega_0$; $\ominus$ si $\omega > \omega_0$

CI: $\theta(0) = 0 \rightarrow \alpha + \frac{A}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} = 0$
 $\dot{\theta}(0) = 0 \rightarrow \beta = 0$
 $\rightarrow \theta(t) = + \frac{A}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} [\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega t)]$

2^e méthode PFD ds R': $m \vec{a}_M = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} \Rightarrow \begin{cases} -m l \ddot{\theta} = m g \cos \theta - T - m \ddot{x} \sin \theta \\ m l \ddot{\theta} = -m g \sin \theta - m \ddot{x} \cos \theta \end{cases}$
d'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = + \frac{\omega_0^2}{l} \cos(\omega t) \cos(\theta)$

Energie: TEM dans R': $\frac{dE_M}{dt} = \mathcal{P}'(\vec{T}) + \mathcal{P}'(\vec{F}_{ie})$

$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \right) + m g l \cos \theta \right] = -m \ddot{x} l \dot{\theta} \cos \theta - m \ddot{x} l \dot{\theta} \sin \theta$

$m l^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + m g l \dot{\theta} \sin \theta = m \omega_0^2 l \dot{\theta} \cos \theta \cos(\omega t)$

$\div m l^2 \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{\omega_0^2}{l} \cos(\omega t) \cos \theta \right)$