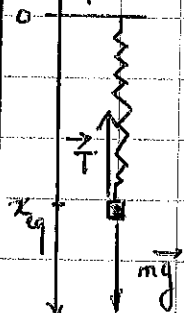


MESM Principe du sismographe

1. Equation du mouvement.



A l'équilibre: la 1^{re} loi de Newton s'écrit

$$-mg\vec{u}_x + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \vec{T} = -k(x_{eq} - b)\vec{u}_x \text{ donc } -mg\vec{u}_x = kx_{eq}\vec{u}_x$$

Soit après projection selon $\vec{u}_x$: $mg = k(x_{eq} - b)$

Hors équilibre: Au bilan de force précédent on ajoute $f = -b\vec{v}$
 Pour tenir compte de la vibration, on applique la 2^{de} loi de Newton dans le référentiel non galiléen (R_N). La masse est alors soumise à la force d'inertie d'entraînement $f_{ie} = -m\ddot{x}_A\vec{u}_x$

$$\text{d'où } -mg\vec{u}_x = k(x - b)\vec{u}_x - m\ddot{x}_A\vec{u}_x$$

Projetons et utilisons la relation à l'équilibre :

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = -\ddot{x}_A$$

$$\text{soit } \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2(x - x_{eq}) = -\ddot{x}_A$$

2. Solution du régime sinusoïdal forcé

$$\ddot{x}_A = -\Omega^2 a \cos(\Omega t)$$

On adoptera la méthode complexe pour établir la solution particulière sinusoïdale qui est celle du régime forcé.

$$\text{Posons } X = x - x_{eq} \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}, \ddot{X} = \ddot{x}$$

$$\text{et sa version complexe: } \underline{X} = \underline{X}_m e^{j\Omega t}; \dot{\underline{X}} = j\Omega \underline{X}; \ddot{\underline{X}} = -\Omega^2 \underline{X}$$

En notation complexe, l'équation du mouvement devient

$$(-\Omega^2 + j\Omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{X}_m e^{j\Omega t} = \Omega^2 a e^{j\Omega t}$$

$$\rightarrow \underline{X}_m = \frac{\Omega^2 a}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j\Omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

3. Amplitude du mouvement : $|X_m| = \frac{\Omega^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \Omega}{Q}\right)^2}}$

ou $|X_m| = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\Omega}\right)^2}}$

$|X_m| \xrightarrow{\Omega \rightarrow 0} 0$
 $|X_m| \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} a$

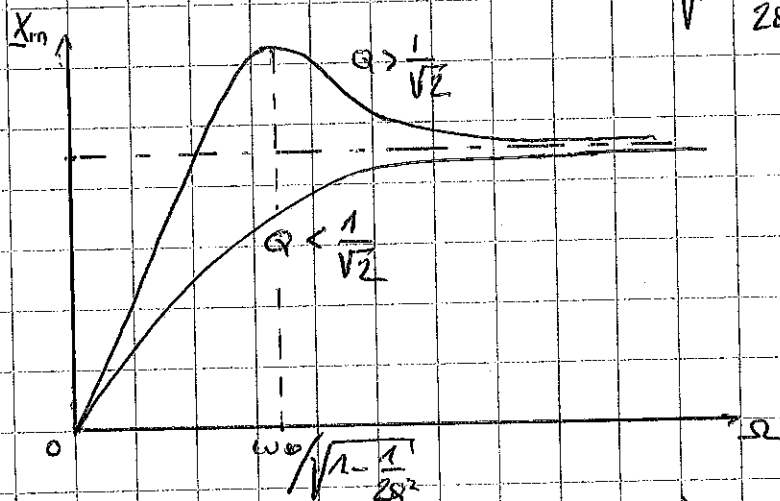
Etude de $|X_m|$: $\frac{d|X_m|}{d\Omega} = -\frac{1}{\Omega^2} \frac{d|X_m|}{d\left(\frac{1}{\Omega}\right)}$

et $\frac{d|X_m|}{d\left(\frac{1}{\Omega}\right)} = \frac{1}{2} a \frac{d}{d\left(\frac{1}{\Omega}\right)} \left[\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\Omega}\right)^2 \right]^{3/2}$

$\frac{d}{d\left(\frac{1}{\Omega}\right)} \left[\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\Omega}\right)^2 \right] = -4 \frac{\omega_0^2}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right) + 2 \frac{\omega_0^2}{Q^2 \Omega^3} = 2 \frac{\omega_0^2}{\Omega} \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right) \right)$

s'annule pour $\frac{1}{\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega \rightarrow \infty$

$\frac{1}{Q^2} = 2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right) \rightarrow \Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$



4. L'amplitude de la vibration du sismomètre est indépendante de Ω lorsque la courbe se confond avec l'asymptote horizontale, pour $\Omega \gg \omega_0$.