

ME 224 - Mouvement d'une perle sur une tige en rotation

$r(t)$: position relative à la tige.

Étudions le mouvement R' : ref. non galiléen liée à la tige.

• Base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$

• Bilan des forces : Poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y = -mg \cos \alpha \vec{e}_r$

• Réaction normale : $\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\phi \vec{e}_\phi$
 • Forces d'inertie

→ d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = m\omega^2 r \vec{e}_r \sin \alpha$

→ de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -m2\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}} = -m2\omega \dot{r} \sin \alpha \vec{e}_\phi$

2^e loi de Newton dans R' : $m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} + \vec{R}$

où $\vec{a}_r = \ddot{r} \vec{e}_r$ (mouvement lié)

Projection selon $\vec{e}_r$: $m\ddot{r} = -mg \cos \alpha + m\omega^2 r \sin^2 \alpha$

→ $\ddot{r} - \omega^2 \sin^2 \alpha r = -g \cos \alpha$ → $\ddot{r} - \Omega^2 r = -a_0 \Omega^2$

Solution : $r(t) = r_0 + A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t}$

CI : $r(0) = r_0 \rightarrow r(0) = r_0 + A + B = r_0$

$\dot{r}(0) = 0 \rightarrow \dot{r}(0) = \Omega(A - B) = 0 \rightarrow A = B$

d'où $A = \frac{r_0 - a_0}{2} \rightarrow r(t) = a_0 + (r_0 - a_0) \cosh(\Omega t)$

• Si $r_0 > a_0$: $r(t) \rightarrow a_0$

• Si $r_0 < a_0$: $r(t) \rightarrow 0$ (base de la tige.)

