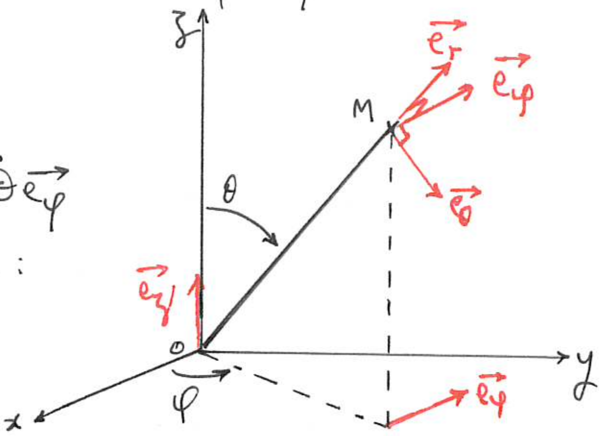
*ME 206 - Composition de mouvements et coordonnées sphériques



1. La base sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ tourne
   - autour Oz à la vitesse $\dot\varphi\, \vec{e_z}$
   - autour de $(M, \vec{e_\varphi})$ à la vitesse $\dot\theta\, \vec{e_\varphi}$

⇒ Vecteur rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\vec\Omega = \dot\theta\, \vec{e_\varphi} + \dot\varphi\, \vec{e_z}$$

Or $\vec{e_z} = \cos\theta\, \vec{e_r} - \sin\theta\, \vec{e_\theta}$

$$\rightarrow \boxed{\vec\Omega = \dot\varphi \cos\theta\, \vec{e_r} - \dot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\theta} + \dot\theta\, \vec{e_\varphi}}$$

2. $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_e(M) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$ par composition des vitesses

où $\vec{v}_e(M) = \vec\Omega \wedge \vec{OM} = \left(\dot\varphi \cos\theta\, \vec{e_r} - \dot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\theta} + \dot\theta\, \vec{e_\varphi}\right) \wedge r\, \vec{e_r}$
$= r\dot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\varphi} + r\dot\theta\, \vec{e_\theta}$

$\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \left(\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\dfrac{d\, r\vec{e_r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \dfrac{dr}{dt}\, \vec{e_r} = \dot r\, \vec{e_r}$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \dot r\, \vec{e_r} + r\dot\theta\, \vec{e_\theta} + r\dot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\varphi}}$$

3. $\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$ par composition des accélérations.

où $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \left(\dfrac{d\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \ddot r\, \vec{e_r}$

$\vec{a}_c = 2\vec\Omega \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = 2\dot r\dot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\varphi} + 2\dot r\dot\theta\, \vec{e_\theta}$

$\vec{a}_e = \left(\dfrac{d\vec\Omega}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec\Omega \wedge (\vec\Omega \wedge \vec{OM})$ Formule de Varignon

$= \left(\dfrac{d\vec\Omega}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\cancel{\vec\Omega \wedge \vec\Omega}}_{\vec 0} + \vec\Omega \wedge (\vec\Omega \wedge \vec{OM})$

$= \ddot\varphi \cos\theta\, \vec{e_r} - \dot\varphi\dot\theta \sin\theta\, \vec{e_r} - \ddot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\theta} - \dot\varphi\dot\theta \cos\theta\, \vec{e_\theta} + \ddot\theta\, \vec{e_\varphi}$
$+ \left(\dot\varphi \cos\theta\, \vec{e_r} - \dot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\theta} + \dot\theta\, \vec{e_\varphi}\right) \wedge \left(r\dot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\varphi} + r\dot\theta\, \vec{e_\theta}\right)$

$= -r\dot\varphi^2 \cos\theta \sin\theta\, \vec{e_\theta} - \dot\varphi^2 r \sin^2\theta\, \vec{e_r} + r\dot\theta\dot\varphi \cos\theta\, \vec{e_\varphi} - r\dot\theta^2\, \vec{e_r}$
$+ \ddot\varphi \cos\theta\, \vec{e_r} - \dot\varphi\dot\theta \sin\theta\, \vec{e_r} - \ddot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\theta} - \dot\varphi\dot\theta \cos\theta\, \vec{e_\theta} + \ddot\theta\, \vec{e_\varphi}$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left|\begin{array}{l} \ddot r - \dot\varphi^2 r \sin^2\theta - r\dot\theta^2 + \ddot\varphi \cos\theta - \dot\varphi\dot\theta \sin\theta \\ -r\dot\varphi^2 \cos\theta \sin\theta - \ddot\varphi \sin\theta\, \vec{e_\theta} - \dot\varphi\dot\theta \cos\theta + 2\dot r\dot\theta \\ r\dot\theta\dot\varphi \cos\theta + \ddot\theta + 2\dot r\dot\varphi \sin\theta \end{array}\right.$$