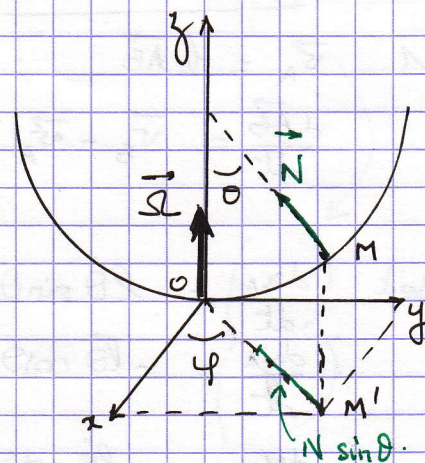


* ME126. Point dans 1/2 sphère en rotation

PFD : $\vec{v}_{rel} = \dot{\vec{OM}} - \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \Omega y \\ \dot{y} - \Omega x \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

$m\ddot{\vec{OM}} = \vec{N} + m\vec{g} - k\vec{v}_{rel}$

$\hookrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{N}{m} \sin\theta \cos\varphi - \frac{k}{m}(\dot{x} + \Omega y) \\ \ddot{y} = -\frac{N}{m} \sin\theta \sin\varphi - \frac{k}{m}(\dot{y} - \Omega x) \\ \ddot{z} = \frac{N}{m} \cos\theta - g \end{cases}$



Hypothèses : Petits mouvements au fond de la 1/2 sphère $\rightarrow z \approx 0 = \text{cte}$

$\sin\theta \cos\varphi = \frac{OM'}{R} \approx \frac{x}{R}$; $\sin\theta \sin\varphi \approx \frac{y}{R}$

$\cos\theta \approx 1$

$\downarrow$
 $\ddot{z} = 0 \Rightarrow N \approx mg$

$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -g \frac{x}{R} - \frac{k}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} \Omega y \\ \ddot{y} = -g \frac{y}{R} - \frac{k}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} \Omega x \end{cases}$

On cherche une solution périodique donc décomposable en série de Fourier ; donc une solution élémentaire :

$x = x_0 e^{j\omega t}$
 $y = y_0 e^{j\omega t}$

$\begin{cases} -\omega^2 x_0 = -\frac{g}{R} x_0 - j\frac{k\omega}{m} x_0 - \frac{k}{m} \Omega y_0 \\ -\omega^2 y_0 = -\frac{g}{R} y_0 - j\frac{k\omega}{m} y_0 + \frac{k}{m} \Omega x_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + \frac{g}{R} + j\frac{k\omega}{m}) x_0 + \frac{k}{m} \Omega y_0 = 0 \\ -\frac{k}{m} \Omega x_0 + (-\omega^2 + \frac{g}{R} + j\frac{k\omega}{m}) y_0 = 0 \end{cases}$

admet une solution si le déterminant est nul :

$(-\omega^2 + \frac{g}{R} + j\frac{k\omega}{m})^2 + (\frac{k}{m} \Omega)^2 = 0$

$\hookrightarrow -\omega^2 + \frac{g}{R} + j\frac{k\omega}{m} = \pm j\frac{k}{m} \Omega \Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \\ \omega = \pm \Omega \end{cases}$

Rq : En l'absence de frottement ($k=0$) on a seulement $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ pendulaire