3 - Bilan d'énergie pour un fil conducteur ohmique

Un fil conducteur rectiligne de conductivité γ, assimilé à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a est soumis à un champ électrique permanent :

$$\vec{E} = E_0\vec{e}_z$$

On rappelle le champ magnétique crée par le fil parcouru par un courant I uniforme .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{e}_\theta \text{ pour } r < a \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta \text{ pour } r \geq a$$

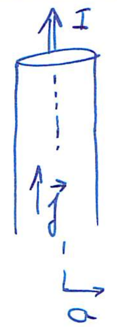
1 – Relier I à E_0.

2 – Quel est le flux du vecteur de Poynting à travers un cylindre d'axe (Oz) de hauteur h et de rayon r.

3 – Conclure à l'aide d'un bilan d'énergie électromagnétique.

1. Loi d'ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

$I \overset{def}{=} \iint_{\text{section fil}} \vec{j}\,\vec{dS} = \gamma\pi a^2 E$ car $\vec{j}$ uniforme



$\Rightarrow \boxed{I = \gamma\pi a^2 E_0}$

2. $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0\vec{e_z}\wedge B\vec{e_\theta}}{\mu_0} = -\dfrac{E_0 B}{\mu_0}\vec{e_r}$.

$\phi_{\vec{\Pi}} = \iint_{\text{cylindre}} \vec{\Pi}.\vec{dS}$ où $\vec{dS} = r\,dz\,d\theta$

$*$ $r < a$: $\boxed{\phi_{\vec{\Pi}} = -\dfrac{E_0 I}{\mu_0}\dfrac{r^2 h}{a^2} = -\gamma\pi r^2 h E_0^2}$

$*$ $r > a$: $\boxed{\phi_{\vec{\Pi}} = -E_0 I h = -\gamma\pi a^2 h E_0^2}$

3. Bilan d'énergie électromagnétique :

$\iiint_{\mathcal{V}} \dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} d\tau = -\phi_{\vec{\Pi}} - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}.\vec{E}\,d\tau$; $\mathcal{V}$: volume du cylindre de rayon r.

$\overset{\|}{0}$ en statique .

$\vec{j}.\vec{E} = j.E_0$ où $j = \dfrac{I}{\pi a^2}$

$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}.\vec{E}\,d\tau = jE_0 \times \pi r^2 h$ si $r < a$

$= jE_0 \times \pi a^2 h$ si $r > a$

Soit $\iiint \vec{j}\,\vec{E}\,d\tau = \gamma E_0^2 \pi r^2 h$ si $r < a$

$= \gamma E_0^2 \pi a^2 h$ si $r > 0$

On obtient bien $0 = -\phi_{\vec{\Pi}} - \iiint \vec{j}\,\vec{E}\,d\tau \quad \forall r$