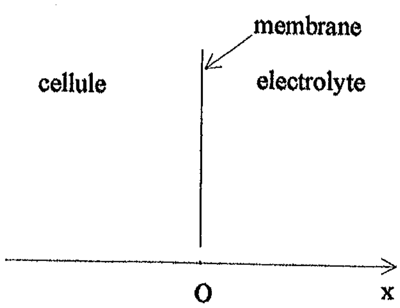
EM223 ~~EM110~~ – **Etude d'une membrane cellulaire**

Une membrane cellulaire est assimilée au plan yOz ; l'axe Ox est orienté vers l'extérieur de la cellule. Toutes les grandeurs physiques sont supposées ne dépendre que de l'abscisse x.

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule), indique une variation de potentiel électrique en général négative :



On schématise le potentiel par la fonction V(x) suivante : pour $x \leq 0$,
$V(x) = -V_0$

pour $x > 0$,
$V(x) = -V_0.\exp(-x/a)$

où V_0 est une constante positive homogène à un potentiel et où a est une distance.

1 – Calculer la densité volumique de charge de part et d'autre de la membrane à l'aide de la loi de Poisson.

2 – Déterminer le champ électrique en tout point. A partir de ce champ, retrouver la densité volumique de charge en tout point.

Comment peut-on avoir une densité de charge non nulle dans un électrolyte ?

3 – En examinant l'éventuelle discontinuité du champ électrique sur la membrane, évaluer la densité surfacique de charge qu'elle porte.

4 – Calculer la charge totale contenue dans un cylindre de section droite d'aire S et s'étendant le long de l'axe (x'Ox) entier. Commenter le résultat obtenu.

1 – Eq° de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$x \leq 0$: $\rho = 0$

$x > 0$: $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{V_0}{a^2} e^{-x/a} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \boxed{\rho = \frac{V_0 \varepsilon_0}{a^2} e^{-x/a}}$

2 – * $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{u_x}$: $x \leq 0$: $\vec{E} = \vec{0}$

$x > 0$: $\vec{E} = -\frac{V_0}{a} e^{-x/a}\vec{u_x}$

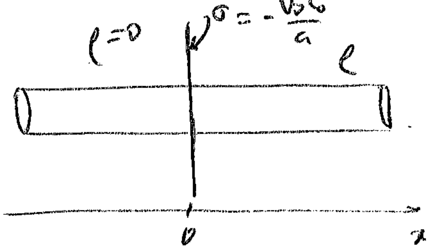
* $\operatorname{div}\vec{E} = +\frac{\rho}{\varepsilon_0}$: $x \leq 0$: $\frac{dE}{dx} = 0 \rightarrow \rho = 0$

$x > 0$: $\frac{dE}{dx} = \frac{V_0}{a^2} e^{-x/a} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho = \frac{V_0\varepsilon_0}{a^2} e^{-x/a}$

Presence d'ions sans contre ion par diffusion active à travers la membrane.

3 – $\vec{E}(x=0^-) = \vec{0}$
$\vec{E}(x=0^+) = -\frac{V_0}{a}\vec{u_x}$
$\left.\right\}$ $\vec{E}(x=0^+) - \vec{E}(x=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x} \rightarrow \boxed{\sigma = -\frac{V_0\varepsilon_0}{a}}$

4 –



$Q = S\sigma + S\int_0^\infty \frac{V_0\varepsilon_0}{a^2} e^{-x/a} = -\frac{V_0\varepsilon_0}{a}S + \frac{SV_0\varepsilon_0}{a^2}\left[-a e^{-x/a}\right]_0^\infty$

$Q = -\frac{V_0\varepsilon_0 S}{a} + \frac{SV_0\varepsilon_0}{a} = 0$

Donc le milieu est globalement neutre