

Particule quantique soumise à un potentiel multidimensionnel (c.n.c. LMP - 2015)

11. Une expérience de diffraction et/ou d'interférence entre particules matérielles permet de mettre en évidence la notion d'onde de matière.

12. Relation de De Broglie : $\lambda = \frac{h}{p}$ c'est la longueur d'onde associée à l'onde matière dérivant la particule massive.

13. Appliquons la conservation de l'énergie mécanique de la particule (électron) accélérée par la différence de potentiel $V_2 - V_1 = U_a$

$$E_{\text{cinit}} + (-e)V_1 = E_{\text{cfinale}} + (-e)V_2 \quad \text{Supposons } E_{\text{cinit}} = 0$$

$$\text{d'où } E_{\text{cfin}} = \frac{1}{2} m v_e^2 \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2eU_a}{m}}$$

$$14. \quad p = m v_e = \sqrt{2emU_a} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU_a}}$$

L'approximation non relativiste est recevable (à 3 chiffres significatifs près) pour U_a à quelques % près pour U_a et en ordre de grandeur pour U_a .

$$\lambda_1 = 388 \text{ pm}$$

$$\lambda_2 = 3,88 \text{ pm}$$

$$\lambda_3 = 1,22 \text{ pm}$$

15. $|\Psi(x,t)|^2$: densité de probabilité de présence de la particule en x à l'instant t

* Condition de normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$ La probabilité de trouver la particule sur l'axe (ox) est totale

16. * On injecte la solution dans l'équation de Schrödinger

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} (-i\omega) \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2) \Psi \quad (\text{où } V(x) = 0 \text{ pour une particule libre})$$

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2$$

* Pour une particule libre, l'énergie se limite à l'énergie cinétique

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{où } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\text{d'où } E = \hbar \omega$$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx \rightarrow \infty$ donc l'onde plane ne vérifie pas la condition de normalisation

$$17. \quad \vec{J} = \frac{\hbar k A^2}{m}$$

21. La particule étant soumise à une force dérivant de l'énergie potentielle $V(x)$, son énergie totale E se conserve

$$E = E_c + V(x) \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E - V(x) \geq 0$$

Donc la particule ne peut se trouver que dans la région de l'espace où $E > V(x)$

Ainsi, elle ne franchit la barrière que si $E > V_0$.

221. $V(x < 0) = 0$

Equation de Schrödinger : $i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$ où $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{iEt/\hbar}$

d'où $\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$ Equation de Schrödinger indépendante du temps.

On écrit la solution sous la forme : $\psi_1(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

Chaque terme est solution de l'équation de Schrödinger si $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

222. $V(x > 0) = V_0$ l'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit donc : $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \psi = 0$ où $E < V_0$

Poseons $\gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} > 0$ la solution générale s'écrit $\psi_2 = C e^{-\gamma x} + D e^{\gamma x}$

La région $x > 0$ étant illimitée, on pose $D = 0$ afin de garder $|\psi_2|$ bornée.

D'où $\psi_2(x) = C e^{-\gamma x}$

D'où $\Psi(x,t) = C e^{-i\omega t} e^{-\gamma x}$: onde évanescente

223. Continuité de la fonction d'onde : $\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A + B = C$

de $\psi'(x)$: $\psi'_1(0) = \psi'_2(0) \Rightarrow ik(A - B) = -\gamma C$

$$\begin{cases} A + B = C \\ ik(A - B) = -\gamma C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = C & (a) \\ A - B = -\frac{\gamma}{ik} C & (b) \end{cases}$$

$$(a) + (b) \rightarrow 2A = \left(1 - \frac{\gamma}{ik}\right) C$$

$$\frac{\gamma}{ik} (a) + (b) \rightarrow \left(\frac{\gamma}{ik} + 1\right) A + \left(\frac{\gamma}{ik} - 1\right) B = 0$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{1 + \frac{\gamma}{ik}}{1 - \frac{\gamma}{ik}} ; \quad \frac{C}{A} = \frac{2}{1 - \frac{\gamma}{ik}}$$

224. $\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\|\vec{j}_{ref}\|}{\|\vec{j}_{incident}\|} = \frac{\left|\frac{\hbar k}{m}\right| |B|^2}{\left|\frac{\hbar k}{m}\right| |A|^2}$; Donc $\left|\frac{B}{A}\right|^2$ donne le rapport des modules des courants de probabilité

Ici $\left|\frac{B}{A}\right|^2 = 1$ les particules quantiques sont toutes réfléchies,

cependant, contrairement au cas classique, la probabilité de présence dans la barrière ($x > 0$) n'est pas nulle.

$$|\Psi(x > 0)|^2 = C^2 e^{-2\gamma x}$$

231 - Continuité de ψ en $x=0$: $1+r = t$ (c)

Continuité de ψ' en $x=0$: $i k A (1-r) = i k_0 t A \Rightarrow 1-r = \frac{k_0}{k} t$ (d)

232 - (c) + (d) : $2 = t \left(1 + \frac{k_0}{k}\right) \rightarrow t = \frac{2}{1 + \frac{k_0}{k}}$

$\frac{k_0}{k} (a) - (b)$: $\left(\frac{k_0}{k} - 1\right) + \left(\frac{k_0}{k} + 1\right) r = 0 \rightarrow r = \frac{1 - \frac{k_0}{k}}{1 + \frac{k_0}{k}}$

233 - $J_i = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$; $J_r = \frac{\hbar k}{m} |rA|^2$; $J_t = \frac{\hbar k_0}{m} |tA|^2$
 $R = |r|^2$; $T = \frac{k_0}{k} |t|^2$; $R + T = \frac{(1 - k_0/k)^2 + 2k_0/k}{(1 + k_0/k)^2} = 1$

Cette somme unitaire traduit la conservation des particules quantiques

$R = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{E-V_0}{E}}}{1 + \sqrt{\frac{E-V_0}{E}}} \right)^2 \xrightarrow{E \gg V_0} 0$ A haute énergie les particules sont toutes transmises, comme en mécanique classique

$T = 1 - R \xrightarrow{E \gg V_0} 1$

$R \xrightarrow{E \rightarrow V_0} 1$ Lorsque la particule a une énergie proche de V_0 on retrouve par continuité des résultats du 224.
 $T \xrightarrow{E \rightarrow V_0} 0$

31 - * Deux milieux conducteurs séparés par un isolant d'épaisseur a (microscopie à effet tunnel)

32 - En mécanique classique, la particule ne peut se trouver dans la région $0 < x < a$ seulement si son énergie $E > V_0$

331 - $T' = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4E(V_0-E)}{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 [E(V_0-E)^2 + ((V_0-E)+E)^2] \text{sh}^2\left(\frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a\right)} = \frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E) + V_0^2 \text{sh}^2\left(\frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a\right)}$

$T'(x) = \frac{4x(1-x)}{4x(1-x) + \text{sh}^2\left(\frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a\right)}$

332 - Barrière mince : $\frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a \ll 1$ alors $\text{sh}\left(\frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a\right) \approx \frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a$

d'où $T'(x) \approx 1$ Les particules traversent toutes la barrière par effet tunnel impossible en classique tant que $E < V_0$

* Barrière épaisse : $\frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a \gg 1$ alors $\text{sh}\left(\frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a\right) \approx \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a\right)$

d'où $T'(x) \approx x(1-x) \exp\left(-\frac{2\sqrt{2mV_0(1-x)}}{\hbar} a\right) \neq 0$ contrairement aux prévisions de la mécanique classique.

* $E \rightarrow V_0$ d'où $x \rightarrow 1 \Rightarrow \begin{matrix} T' \rightarrow 0 \\ R' \rightarrow 1 \end{matrix}$ En classique, les particules ont une énergie cinétique nulle sur la barrière donc la particule s'arrête en $x=a$.

333. Pour un électron : $\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} a \approx 10^{-0,5}$, la barrière a donc une largeur quelconque.

On utilise l'expression générale (non approchée de T')
On trouve $T' = 1/(1 + \hbar^2 \sqrt{mV_0} a / \hbar) \Rightarrow T' = 0,548$

Pour le proton $\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} a \approx 10^{2,1} \gg 1$ (ce d'une barrière épaisse)

On utilise $T' \approx X(1-X) \exp\left(-2 \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} a\right)$

$T' \approx 1,30 \cdot 10^{-31}$. Les protons ne traversent donc pas la barrière par effet tunnel.