Fénelon Sainte-Marie La Plaine Monceau
GROUPE SCOLAIRE

Samedi 22 mars 2025

Physique

DEVOIR SURVEILLE n°8

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

PC/PC*

2024-2025

Recommandations :

- Pour choisir l'ordre dans lequel vous traiterez les problèmes **lisez le sujet en entier au préalable**.
- Les résultats littéraux et numériques doivent être **encadrés.**
- Un résultat numérique sans **unité** est considéré faux.
- Les **correcteurs** (effaceurs, peinture, ruban, stylo à friction) sont interdits.
- La rédaction se fait en langue française respectant syntaxe, grammaire et orthographe.
- Une relecture finale attentive, 15 minutes avant la fin de l'épreuve est indispensable.

Pénalité : Un défaut de qualité de la copie (présentation, écriture, orthographe, syntaxe) pourra faire l'objet d'une pénalité de 1 ou 2 points sur la note finale.

Problème PC

Particule quantique soumise à un potentiel unidimensionnel

Données :

- Constante de Planck : h = $6{,}626.10^{-34}$ J.s
- Constante de Planck réduite $\frac{\hbar}{2\pi} = 1{,}055.10^{-34}$ J.s
- Charge élémentaire e = $1{,}602.10^{-19}$ C
- Masse de l'électron : $m_e = 9{,}109.10^{-31}$ kg
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}381.10^{-23}$ J.K^{-1}
- Masse du proton $m_p = 1{,}673.10^{-27}$ kg
- Vitesse de la lumière c = $2{,}999.10^{8}$ m.s^{-1}
- 1 eV = $1{,}602.10^{-19}$ J

On s'intéresse au mouvement à une dimension d'une particule non relativiste de masse m et d'énergie $E > 0$ se déplaçant parallèlement à l'axe (Ox) dans l'énergie potentielle $V(x)$. Dans ce qui suit, on note $\Psi(x,t)$ la fonction d'onde complexe de l'onde de De Broglie associée à la particule. L'équation de Schrödinger vérifiée par $\Psi(x,t)$ s'écrit :

$$\boxed{i.\hbar.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2.m}.\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x).\psi(x,t)}$$

Dans toute la suite on cherchera des solutions de l'équation de Schrödinger pour des états stationnaires tels que $\Psi(x,t) = \Psi(x).e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

1 – Onde de De Broglie

1.1 – Décrire succinctement une expérience illustrant la notion d'onde de matière.

1.2 – Enoncer la relation de De Broglie, pour une particule matérielle de masse m, reliant la quantité de mouvement p, et la longueur d'onde λ. Interpréter cette relation physiquement.

1.3 – D'après la mécanique classique, déterminer la vitesse v_e acquise par un électron de masse m_e et de charge (-e) accéléré par une tension U_a.

1.4 – Exprimer la longueur d'onde de De Broglie λ_e de cet électron, en fonction de U_a. Calculer numériquement les longueurs d'ondes λ_1, λ_2 et λ_3 pour les trios potentiels d'accélération $U_{a1} = 1\ kV$, $U_{a2} = 100\ kV$ et $U_{a3} = 1\ MV$. Vérifier dans chacun des cas la validité de l'hypothèse non relativiste sachant qu'un calcul en mécanique relativiste donne $\lambda_1 = 38{,}8\ pm$, $\lambda_2 = 3{,}71\ pm$ et $\lambda_3 = 0{,}94\ pm$.

1.5 – Donner l'interprétation physique de $|\Psi(x,t)|^2$. Interpréter également la condition de normalisation de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$.

1.6 – On considère une particule libre de masse m, d'énergie totale E dont l'état peut être décrit par la fonction d'onde $\Psi(x,t)$. Donner la relation qui existe entre k et ω pour une onde plane monochromatique $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ soit compatible avec l'équation de Schrödinger. En déduire la valeur de l'énergie E en fonction de ω. La fonction d'onde satisfait-elle la condition de normalisation de la fonction d'onde ?

1.7 – Déterminer la courant de probabilité $\vec{J} = \frac{\hbar.\vec{k}}{m}|\Psi(x,t)|^2$ dans le cas de la fonction d'onde $\Psi(x,t) = Ae^{-i(\omega t-kx)}$, A étant une constante réelle.

2 – Réflexion de particules sur un mur de potentiel

On envoie sur une marche d'énergie potentielle dans le sens des x croissants, un flux permanent monocinétique de particules de masse m et d'énergie E. En $x = 0$, une particule rencontre une barrière de potentiel d'énergie $V = V_0$ en forme de marche : dans le domaine $x < 0$, l'énergie potentielle est nulle, dans le domaine $x \geq 0$, elle est égale à V_0. La zone d'énergie potentielle égale à V_0 s'étend à l'infini (Figure 1)

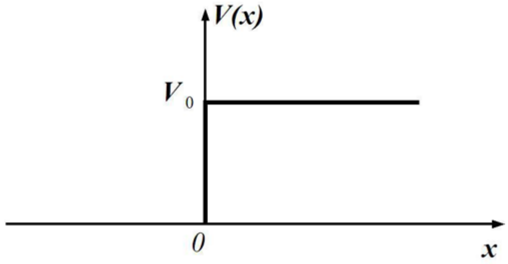

Figure 1

2.1 – Etudier les cas physiques possibles du mouvement de la particule dans le cadre de la mécanique classique selon que $E > V_0$ ou $E < V_0$. Sous quelle condition la particule pourra-t-elle franchir la barrière d'énergie potentielle ?

2.2 – On étudie maintenant les cas physiques possibles du mouvement de la particule dans le cadre de la mécanique quantique dans le cas $E < V_0$.

2.2.1 – Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps relative à la région $x < 0$. Pour cette région, la fonction d'onde indépendante du temps $\Psi_1(x,t)$ est la somme d'une onde de De Broglie d'amplitude A se propageant dans le sens des x croissants et d'une onde d'amplitude B se propageant en sens inverse. Donner en fonction de E, m et $\hbar$, l'expression du module du vecteur d'onde k de ces ondes puis celle de la fonction d'onde $\Psi_1(x,t)$ en fonction des paramètres A, B et k.

2.2.2 – Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps relative à la région $x > 0$. Montrer que dans cette région, la fonction d'onde de De Broglie indépendante du temps $\Psi_2(x,t)$ est de la forme $\Psi_2(x) = Ce^{-\gamma x}$. Interpréter cette solution et donner l'expression de γ en fonction des données.

2.2.3 – Quelles sont les conditions de raccordement (continuité) relatives à la fonction d'onde spatiale qui permettent de déterminer les constantes qui interviennent dans les solutions précédentes ? En déduire les deux rapports : $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$.

2.2.4 – Calculer le coefficient $\left|\frac{B}{A}\right|^2$. Quelle est sa signification physique et comment interprète-t-on la valeur qu'il a dans ce problème ? Quelle différence fondamentale subsiste par comparaison avec la mécanique classique ?

2.3 – On envisage maintenant les cas physiques possibles du mouvement de la particule dans le cadre de la mécanique quantique dans le cas $E > V_0$.

La fonction d'onde de De Broglie associée à la particule de masse m et d'énergie E et solution de l'équation de Schrödinger est donnée par :

$$\Psi(x) = \begin{cases} A.e^{ikx} + rA.e^{-ikx} & pour\ x < 0 \\ tA.e^{ik_0x} & pour\ x > 0 \end{cases}$$

Avec k prenant l'expression trouvée dans la question 2.2.1., $E - V_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ et A est une constante, t et r sont des coefficients que l'on calculera dans la suite.

2.3.1 – Ecrire les conditions de raccordement de la fonction d'onde.

2.3.2 – Calculer les coefficients t et r en fonction de k et k_0.

2.3.3 – Calculer le courant de probabilité incident J_i , réfléchi J_r , et transmis J_t. On définit les coefficients de réflexion R et de transmission T de la marche de potentiel : $R = \left|\frac{J_r}{J_i}\right|$ et $T = \left|\frac{J_t}{J_i}\right|$. Exprimer R et T ainsi que leur somme. Commenter. Calculer la limite de R et celle de T pour $E >> V_0$ puis pour $E \rightarrow V_0$. Comparer avec les résultats de la mécanique classique.

3 – Barrière de potentiel

On considère un faisceau d'électrons, non relativistes, de masse m, qui se déplacent parallèlement à l'axe (Ox) dans le sens des x croissants, et qui vient heurter en $x = 0$ une barrière de potentiel de hauteur $V_0 > 0$ et d'épaisseur a définie par :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & pour\ 0 < x < a \\ 0 & sinon \end{cases}$$

3.1 – Donner l'exemple d'un système physique qui pourrait être modélisé par la barrière de potentiel $V(x)$.

3.2 – Que peut-on dire du point de vue de la mécanique classique sur la présence de la particule dans la région de l'espace $0 < x < a$?

3.3 – On mène une étude dans le cadre de la mécanique quantique similaire à celle qui a été menée au 2.2. On aboutit aux coefficients de réflexion et de transmission R' et T' :

$$R' = \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 . sh^2(\gamma a)}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 . sh^2(\gamma a)}$$

et

$$T' = \frac{4\gamma^2 k^2}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 . sh^2(\gamma a)}$$

Où $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $\gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

3.3.1 - Poser $X = \frac{E}{V_0}$ et écrire $T'(X)$ en fonction de la variable X.

3.3.2 – Etablir des formules approchées du coefficient T' dans le cas où la barrière est mince, puis dans le cas où la barrière est épaisse. Que devient la transparence d'une barrière quelconque lorsque l'énergie cinétique des particules incidentes tend vers V_0 ? Comparer ces résultats à ceux de la mécanique classique.

3.3.3 – Application numérique : La hauteur de la barrière est $V_0 = 2\ eV$ et sa largeur $a = 1\ nm$. L'énergie des particules incidentes est $E = 1\ eV$. Calculer la valeur du coefficient de transmission T' pour un électron puis pour un proton. On précisera au préalable dans chaque cas quelle expression de T' sera utilisée (approchée ou non). Comparer les deux valeurs et conclure.

Problème PC ✯

Le maser à ammoniac

(Les 3 premières lignes de la page suivante ne sont pas à prendre en considération)

(Les données en dernière page ne sont pas toutes nécessaires)