

CONCOURS BLANC PC/PC*

EPREUVE DE PHYSIQUE

Durée 4H

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Attention ce document contient le sujet PC ET le sujet PC*. Seul l'un des deux sujets est à traiter.

Le sujet PC étudie le rebond d'une goutte d'eau (pages 2 à 9).*

Le sujet PC s'intéresse aux sous-marins et animaux marins (pages 10 à 25).

Le candidat indiquera clairement sur sa copie le sujet choisi. Tout au long de l'épreuve, les principaux résultats seront encadrés. Les résultats numériques seront affichés avec un nombre de chiffres significatifs raisonnable et accompagnés de leur unité. Le candidat veillera également à numéroter ses copies. Toute copie insuffisamment soignée sera pénalisée.

SUJET PC*

REBONDS D'UNE GOUTTE D'EAU

Il est possible de réaliser par traitement chimique d'une plaque métallique une surface plane parfaitement hydrophobe : une goutte d'eau posée sur cette surface n'y est en contact qu'en un seul point et on constate qu'elle adopte une forme sphérique si elle est suffisamment petite (observation **O1**).

Lorsqu'on lâche une goutte sphérique de rayon $a_0 \approx 1,0$ mm sans vitesse initiale à une hauteur $h \approx 10$ cm au-dessus de la plaque supposée horizontale et qu'on filme avec une caméra rapide, on constate que la goutte reste au contact du plan hydrophobe pendant une durée τ de l'ordre de quelques millisecondes (observation **O2**). Pendant cette phase, la goutte s'aplatit puis s'arrondit avant de décoller.

Une fois qu'elle a décollé, la goutte qui a récupéré sa forme sphérique remonte jusqu'à une altitude maximale inférieure à h avant de retomber. Le processus se répète ensuite avec cinq à dix rebonds perceptibles (observation **O3**).

Le but du problème est de proposer des modèles simples tentant d'interpréter ces observations.

Toutes les définitions et données numériques utiles pour tout le problème sont rassemblées en fin d'énoncé. Dans tout le problème, *exprimer* ou *déterminer* une grandeur signifie en donner une expression littérale. En revanche *calculer* une grandeur signifie en donner une valeur numérique avec deux chiffres significatifs. Dans tout le problème, les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ou d'une flèche dans le cas général, le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\hat{u}_z$ est uniforme et le référentiel terrestre supposé galiléen. Une quantité surmontée d'un point indique la dérivée totale par rapport au temps de cette quantité : $\dot{a} = \frac{da}{dt}$.

I. — Forme des gouttes

Dans toute cette partie, la goutte est supposée au repos. Pour faciliter les calculs correspondants à l'observation **O1**, on adopte une géométrie différente de la réalité en considérant la goutte cylindrique de rayon a et de hauteur e comme représenté sur la figure 1. Du fait que le contact avec la goutte réelle est ponctuel, on admet que dans le modèle cylindrique, toute la surface du cylindre (y compris sa base) est en contact avec l'air ; cela revient à supposer qu'une mince couche d'air sépare la base du cylindre de la plaque. L'expérience montre que les interactions entre l'eau et l'air sont associées à une énergie potentielle de la forme $E_{p,t} = AS$ où S est l'aire de l'interface eau-air et A une constante positive appelée coefficient de tension superficielle.

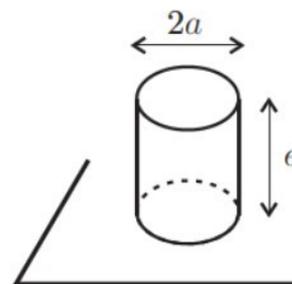


FIGURE 1 – Modèle cylindrique

I.A. — Rôle de la tension superficielle

Dans la partie I.A on néglige la pesanteur.

□ 1 — Exprimer le volume V de la goutte cylindrique et sa surface totale de contact avec l'air S en fonction de a et e . En déduire que son énergie potentielle de tension superficielle se met sous la forme :

$$E_{p,t} = 2\pi A a^2 + \frac{2AV}{a}$$

□ 2 — Déterminer, pour V et A fixés, la valeur a_0 de a pour laquelle $E_{p,t}$ passe par un minimum. On exprimera a_0 en fonction de V . Vérifier que la valeur correspondante de l'épaisseur de la goutte est $e_0 = 2a_0$, ce qui donne une géométrie « proche » de la sphère. En déduire l'expression du minimum de l'énergie potentielle en fonction de A et a_0 , tracer le graphe de $E_{p,t}$ en fonction de a .

□ 3 — Déterminer, pour V et A fixés l'expression de $\left. \frac{d^2 E_{p,t}}{da^2} \right|_{a=a_0}$ en fonction de A . En déduire qu'au voisinage de $a = a_0$, on peut mettre, à une constante additive près, l'énergie potentielle de tension superficielle sous une forme analogue à l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et de longueur a . On exprimera k en fonction de A et ℓ_0 en fonction de a_0 . Calculer k et comparer à la raideur d'un ressort réel qui s'allonge de $\Delta l = 1$ cm lorsqu'on lui suspend une masse $m = 100$ g.

I.B. — Influence de la pesanteur

Dans cette partie on prend en compte la pesanteur. On prend l'origine des énergies potentielles de pesanteur à la base de la goutte de telle sorte que les cotes de ses faces inférieure et supérieure sont respectivement $z = 0$ et $z = e$. On fait l'hypothèse que l'énergie potentielle de pesanteur modifie très peu la valeur a_0 de a qui rend minimale l'énergie potentielle totale de la goutte. On supposera notamment que la relation entre V et a_0 obtenue à la question 2 reste vraie.

□ 4 — Montrer que, sous ces hypothèses, l'énergie potentielle de pesanteur de la goutte s'écrit

$$E_{p,g} = \frac{2\pi\mu_e g a_0^6}{a^2}$$

□ 5 — On note $a_1 = a_0(1 + \epsilon)$ la valeur qui rend minimale l'énergie potentielle totale de la goutte. En supposant $\epsilon \ll 1$ et en utilisant un développement limité, déterminer à l'ordre 1 l'expression de ϵ en fonction de a_0 , μ_e , g et A . Interpréter le signe de ϵ . Vérifier *a posteriori* l'hypothèse $\epsilon \ll 1$.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Modèle mécanique du rebond

L'analyse de la partie I conduit à modéliser la tendance d'une goutte à reprendre une forme sphérique par un ressort de raideur k . Pour prendre en compte par ailleurs l'inertie de la goutte et d'inévitables frottements internes, on adopte le modèle de la figure 2 : on attache sous une masse ponctuelle $m = 6,3 \text{ mg}$ un patin (P) plan de masse nulle via un ressort de raideur $k = 2,6 \text{ N.m}^{-1}$ et de longueur à vide e_0 et un amortisseur qui exerce sur m une force de la forme $\vec{F} = -f \dot{e} \hat{u}_z$ où e est la distance entre la masse m et le patin. Le ressort et l'amortisseur sont montés en parallèle. On néglige la masse du ressort et la masse de l'amortisseur. Dans ce modèle toute la masse de la goutte est concentrée en son sommet, cela sera corrigé dans la partie III.

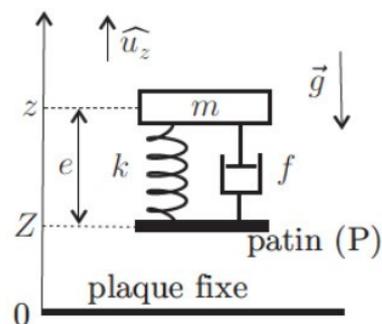


FIGURE 2 – Modèle mécanique de la goutte

À chaque instant t , on repère les mouvements du système par la cote $z(t)$ de la masse m et par la cote $Z(t) = z(t) - e(t)$ du patin (P), la cote nulle étant prise sur la plaque fixe.

II.A. — Étude de la chute

Le système est abandonné avec les conditions initiales $z(t=0) = h + e_0$, $\dot{z}(t=0) = 0$, $e(t=0) = e_0$ et $\dot{e}(t=0) = 0$. On néglige les forces exercées par l'air.

- 6 — En isolant le patin, montrer que $e(t)$ reste constamment égal à e_0 .
- 7 — Justifier par ailleurs que l'évolution de $z(t)$ correspond à une chute libre. En déduire, en fonction de g et h , l'expression du module de la vitesse $v_0 = |\dot{z}(t_0)|$ de la masse m à l'instant t_0 où le patin touche la plaque de cote $z = 0$. Calculer v_0 .

II.B. — Étude du choc sur la plaque

On fixe désormais l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où le patin touche la plaque. Du fait de sa masse nulle, sa vitesse devient instantanément nulle. On repère alors l'évolution de l'épaisseur $e(t)$ avec les conditions initiales $e(t=0) = e_0$ et $\dot{e}(t=0) = -v_0$. Dans toute la suite de cette partie on suppose que le poids de la goutte est négligeable devant les autres forces en jeu.

- 8 — On suppose que le patin reste au contact de la plaque fixe en $z = 0$. Montrer que l'équation différentielle décrivant l'évolution de $\varepsilon(t) = e(t) - e_0$ se met sous la forme

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

où l'on explicitera les constantes positives ω_0 et Q en fonction de m , k et f .

- 9 — On suppose que $Q^2 \gg 1$ et l'on néglige tous les termes en $1/Q^2$. En déduire que la solution générale est de la forme $\varepsilon(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) [B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t)]$ et déterminer les constantes d'intégration B et C en fonction de v_0 et ω_0 .
- 10 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la suite des instants correspondants aux extrema successifs (positifs ou négatifs) de $\varepsilon(t)$. On admet que les oscillations de $\varepsilon(t)$ sont perceptibles tant que leur amplitude $\varepsilon(T_n)$ reste supérieure ou égale à 10% de la valeur initiale $\varepsilon(T_0)$. Exprimer le nombre d'oscillations perceptibles en fonction de Q . Combien peut-on en observer si $Q = 5$? On conservera cette valeur de Q dans toute la suite de cette partie.

II.C. — Décollement de la goutte

On s'intéresse désormais à la possibilité de décollement du patin. On note $\vec{R} = R\hat{u}_z$ l'action de contact exercée par la plaque fixe sur le patin.

□ 11 — Établir l'expression de R en fonction de k , f , ε et $\dot{\varepsilon}$.

□ 12 — En limitant les calculs à l'ordre 1 en $1/Q$, de simples substitutions non demandées donnent alors

$$R = m\omega_0 v_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \left\{ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{Q} \cos(\omega_0 t) \right\}$$

Déterminer l'instant $\tau > 0$ où le patin décolle. Calculer sa valeur, le modèle est-il en accord avec les observations? Quelle erreur relative commet-on si l'on néglige le terme en $1/Q$ dans l'expression de τ ?

□ 13 — Quelle loi de variation de τ en fonction du paramètre a_0 , étudié dans la partie I, le modèle prévoit-il? Une étude expérimentale menée sur des gouttes de rayon variant entre 0,5 mm et 2 mm a permis de tracer le graphe de la figure 3 en échelle log-log. Tester la validité du modèle.

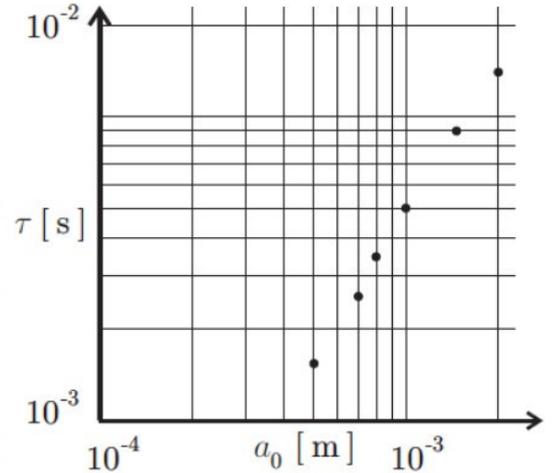


FIGURE 3 — τ fonction de a_0

FIN DE LA PARTIE II

III. — Modèle ondulatoire du rebond

Le modèle de la partie II présente l'inconvénient de concentrer toute la masse de la goutte en son sommet. Par ailleurs les forces de tension superficielle, bien que ne n'existant qu'en surface ont une influence au sein de la goutte par le biais des forces de pression. On adopte donc dans cette partie un modèle plus respectueux du caractère continu du milieu envisagé mais afin d'éviter de lourds calculs on se limite à une géométrie unidimensionnelle et à de faibles déformations. De plus on ne s'intéresse qu'à la phase où la goutte est au contact de la plaque; on néglige donc la pesanteur.

III.A. — Équation d'onde

La goutte est modélisée comme sur la figure 4 par une chaîne de N masses M liées par des ressorts identiques de longueur à vide d_0 et de raideur K . Au repos la masse de numéro (n) est située à la cote nd_0 et on repère son mouvement par sa cote $z_n = nd_0 + \xi_n(t)$.

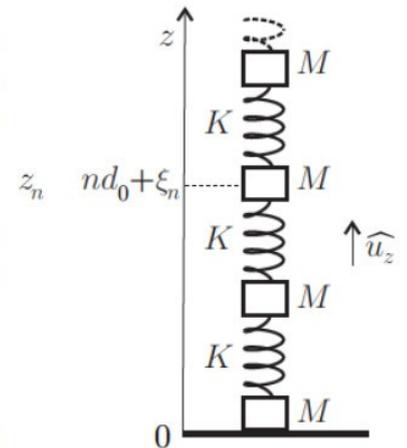


FIGURE 4 — Modèle ondulatoire

□ 14 — En supposant $1 < n < N$, établir l'équation du mouvement de la n -ième masse faisant intervenir les positions $\xi_n(t)$, $\xi_{n-1}(t)$ et $\xi_{n+1}(t)$.

□ 15 — On fait l'approximation des milieux continus en introduisant une fonction de deux variables $\xi(z,t)$ telle que $\xi(z = nd_0, t) = \xi_n(t)$ et en considérant de plus que $d_0 \rightarrow 0$ pendant que $N \rightarrow +\infty$. Montrer que $\xi(z,t)$ est solution d'une équation de D'ALEMBERT faisant apparaître une célérité c que l'on exprimera en fonction de K , d_0 et M . Montrer que la force exercée par la partie inférieure de la chaîne sur la partie supérieure s'écrit

$$\vec{F}(z,t) = -K d_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} \hat{u}_z$$

□ 16 — On cherche des solutions de la forme $\xi(z,t) = \xi_M \sin(\alpha z - \varphi) \cos(\omega t - \psi)$ avec $0 \leq \varphi < \pi$ et $0 \leq \psi < \pi$. Établir l'expression de $\alpha > 0$ en fonction de ω et c .

III.B. — Conditions aux limites - Conditions initiales

La chaîne de masses est finie et localisée au repos entre la cote $z = 0$ de la plaque et la cote $z = 2a_0$, de telle sorte que la masse inférieure est à tout instant au contact de la plaque.

□ 17 — Quelle est la condition aux limites imposée par la plaque à la masse inférieure qui est directement posée sur elle ? En déduire la valeur de φ .

□ 18 — Justifier le fait que $\left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=2a_0} = 0$ à tout instant. En déduire que seule une suite de pulsations ω_i associées à un entier i sont possibles et les exprimer en fonction de i , a_0 et c .

□ 19 — Les conditions initiales $\xi|_{t=0}$ et $\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=0}$ sont délicates à mettre en œuvre car au moment où la chaîne touche la plaque, elle est déformée par la pesanteur. On choisit donc comme nouvelle origine la position de la masse inférieure à $t = 0$. Les calculs complets étant hors de portée, on admet que seul le mode fondamental, de pulsation la plus basse, est présent avec $\varphi = 0$, $\psi = 0$ et $\xi_M < 0$. En déduire que la masse inférieure reste au contact de la plaque jusqu'à la date τ que l'on exprimera en fonction de a_0 et c .

III.C. — Retour à la goutte d'eau

Pour faire le lien entre ce modèle et la goutte, il convient d'explicitier c et donc K . On suppose donc qu'il y a $N \gg 1$ masses ponctuelles identiques $M = m/N$ distantes au repos de $d_0 = 2a_0/N$.

□ 20 — Déterminer, en fonction de κ , l'expression de la raideur du ressort obtenu en associant en série deux ressorts de même raideur κ .

□ 21 — En déduire l'expression de la raideur K que doit posséder chaque ressort de la chaîne pour que celle-ci soit équivalente au ressort unique de raideur k de la question 3 modélisant les effets de la tension superficielle. On exprimera K en fonction de A et N .

□ 22 — Exprimer alors le temps de contact τ de la goutte en fonction de A , μ_e et de son rayon a_0 . Calculer τ et comparer avec le résultat de la question 13.

III.D. — Rôle éventuel de la compressibilité de l'eau

On se demande à présent si l'incompressibilité de l'eau peut être remise en cause.

□ 23 — Quel phénomène courant prouve le caractère compressible de l'eau ? Comment peut-on mesurer très simplement son coefficient de compressibilité isentropique χ_s avec le matériel d'une salle de travaux pratiques ? On ne demande pas un protocole détaillé mais juste le principe de la mesure.

□ 24 — Si on omet l'influence de la tension superficielle et qu'on privilégie le caractère compressible de l'eau, on peut conserver le modèle utilisé dans cette partie à condition de remplacer la célérité c des ondes obtenue à la question 15 par la célérité du son dans l'eau c_e . Calculer dans ce cadre le temps de contact τ de la goutte d'eau sur la plaque et conclure.

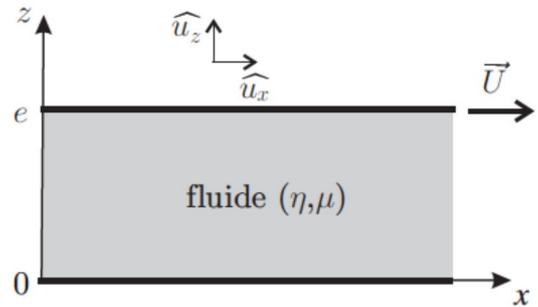
FIN DE LA PARTIE III

IV. — Étude des pertes lors du rebond

On se propose dans cette partie de relier le nombre limité de rebonds (observation O3) à la dissipation d'énergie pendant le rebond de la goutte d'eau sur la plaque. Pour cela on étudie d'abord un écoulement plan simple afin d'établir une expression de la puissance dissipée par viscosité dans l'eau.

IV.A. — Puissance dissipée par viscosité dans un écoulement modèle

Dans cette question on envisage l'écoulement stationnaire d'un fluide de viscosité η et de masse volumique μ constantes entre deux plaques planes de cotes respectives $z = 0$ et $z = e$. La plaque inférieure est fixe alors que l'on déplace la plaque supérieure à vitesse constante $\vec{U} = U \hat{u}_x$ (voir figure 5). L'épaisseur e étant faible, on néglige la pesanteur. On rappelle l'équation de Navier-Stokes :



$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}$$

FIGURE 5 – Écoulement modèle

On cherche a priori un champ des vitesses sous la forme $\vec{v} = v(x, z) \hat{u}_x$ et un champ de pression de la forme $p = p(z)$

□ 25 — Montrer qu'en fait $\vec{v} = v(z) \hat{u}_x$ et que l'accélération des particules de fluide est nulle.

□ 26 — Montrer que le champ de pression est uniforme et que dans le cas général, v est une fonction affine de z . En considérant les conditions aux limites du problème, exprimer alors v en fonction de z , U et e .

□ 27 — Montrer que la force surfacique exercée par une particule de fluide sur la particule de fluide située sous elle s'écrit $\frac{d\vec{F}}{dS} = f_s \hat{u}_x$ où l'on exprimera f_s en fonction de η , U et e .

□ 28 — En déduire que la puissance des actions de contact reçue par une particule de fluide de volume $d\vartheta = dx dy dz$ de la part de ses voisines s'écrit $d\mathcal{P}_{\text{ext}} = \rho d\vartheta$ où l'on exprimera ρ en fonction de η , U et e . Commenter le signe de \mathcal{P}_{ext} lorsqu'on applique ce résultat à l'ensemble du fluide.

□ 29 — En déduire l'expression de la puissance développée par les forces intérieures à une particule de fluide de volume $d\vartheta = dx dy dz$. Commenter son signe, qu'advient-il de cette puissance ?

IV.B. — Cas de la goutte

On suppose que l'étude la partie IV.A peut être adaptée au cas de la goutte d'eau posée sur la plaque et qui se déforme. On estime que la puissance volumique dissipée par viscosité peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\vartheta} = \eta_e \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} \right)^2$$

où $e(t) \approx 2a(t)$ est l'épaisseur de la goutte et $a(t)$ son rayon.

□ 30 — Donner une estimation de $\frac{1}{e} \frac{de}{dt}$ en fonction du temps de contact τ de la goutte. En déduire une expression de l'ordre de grandeur de l'énergie ΔE dissipée par viscosité au sein de la goutte pendant son rebond en fonction de η_e , a_0 et τ .

□ 31 — Soit E l'énergie cinétique de la goutte au moment où elle touche la plaque et où elle n'est pas encore déformée. Exprimer le rapport $E/\Delta E$ en fonction de τ , g , h , μ_e et η_e . En estimant la valeur de ce rapport, indiquer si les pertes pendant le rebond permettent d'interpréter l'observation O3.

□ 32 — Calculer en ordre de grandeur le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e correspondant aux oscillations de la goutte. En quoi le modèle de la partie IV.A est-il critiquable? Pour corriger ce modèle, on admet que la viscosité réelle de l'eau doit être remplacée par une viscosité effective $\eta_{\text{eff}} = \eta_e \mathcal{R}_e$. Les pertes pendant le rebond permettent-elles alors d'interpréter l'observation O3?

FIN DE LA PARTIE IV

V. — Étude des pertes dans l'air

Pour estimer le nombre maximal de rebonds, on néglige désormais les pertes d'énergie lors du rebond et on se focalise sur les pertes d'énergie lors du déplacement de la goutte dans l'air. Dans cette partie la goutte est supposée sphérique de rayon a_0 . Elle est lancée d'une hauteur h sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. Les actions de l'air sur la goutte sont modélisées uniquement par une force de traînée, ce qui suppose notamment que l'on néglige la poussée d'Archimède. De plus, on suppose que cette force de traînée est de la forme $\vec{F} = -\mu_a \pi a_0^2 v \vec{v}$

V.A. — Ordres de grandeurs

On néglige tout d'abord la traînée pour étudier le mouvement de la goutte.

□ 33 — Exprimer la vitesse v de la goutte de rayon a_0 lâchée d'une hauteur h lorsqu'elle passe à la hauteur z au-dessus de la plaque.

□ 34 — Exprimer le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e de la goutte lorsqu'elle se trouve à la hauteur z au-dessus de la plaque en fonction de η_a , μ_a , g , h , a_0 et z . Calculer \mathcal{R}_e après un centimètre de chute et lorsque la goutte atteint la plaque. Commenter le choix adopté par l'énoncé pour l'expression de la force de traînée.

V.B. — Influence de la traînée sur le nombre de rebonds

La résolution analytique de l'équation du mouvement en présence de la traînée ne présentant pas d'intérêt pour évaluer un simple ordre de grandeur du nombre de rebonds, on simplifie davantage le modèle en remplaçant la traînée par sa valeur au moment de l'impact de la goutte sur la plaque, la vitesse de la goutte à cet instant étant estimée en l'absence de traînée.

□ 35 — Montrer que cette simplification revient à remplacer le champ de pesanteur g par une valeur effective g_- lorsque la goutte se dirige vers la plaque et g_+ lorsqu'elle s'en éloigne. On écrira $g_{\pm} = g(1 \pm \gamma)$ et l'on exprimera la constante γ en fonction de μ_a , μ_e , h et a_0 . Calculer γ et commenter sa valeur.

□ 36 — On note h_n l'altitude de la goutte après n rebonds en identifiant h_0 à la hauteur h de laquelle on lâche la goutte. Exprimer h_n en fonction de h , n et γ .

□ 37 — Exprimer un ordre de grandeur du nombre de rebonds maximal N en fonction de μ_e , μ_a , h et a_0 . Calculer N et commenter ce résultat compte-tenu de l'observation O3.

FIN DE LA PARTIE V

Données numériques

- Masse volumique $\left\{ \begin{array}{l} \text{de l'eau : } \mu_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \\ \text{de l'air : } \mu_a = 1,3 \text{ kg.m}^{-3} \end{array} \right.$
- Viscosité dynamique $\left\{ \begin{array}{l} \text{de l'eau : } \eta_e = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s} \\ \text{de l'air : } \eta_a = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s} \end{array} \right.$
- Célérité du son $\left\{ \begin{array}{l} \text{dans l'eau : } c_e = 1,4 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1} \\ \text{dans l'air : } c_a = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1} \end{array} \right.$
- Coefficient de tension superficielle entre l'eau et l'air : $A = 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$
- Rayon de la goutte d'eau considérée : $a_0 = 1,0 \text{ mm}$
- Hauteur de laquelle les gouttes sont lâchées : $h = 10 \text{ cm}$.
- Champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

SUJET PC

Problème N°1 :

Quelques aspects de la physique des sous-marins

Introduction

" Un **sous-marin** est un navire submersible capable de se déplacer en surface et sous l'eau ; il se distingue ainsi des autres bateaux et navires qui se déplacent uniquement à la surface... " d'après Wikipédia.

Les grands sous-marins sont pour la plupart des navires de guerre. Il en existe deux types : les SNA (Sous-marin Nucléaire d'Attaque) et les SNLE (Sous-marin Nucléaire Lanceur d'Engins). On va s'intéresser ici principalement à ces derniers. Les quatre SNLE français patrouillent successivement en mer pour assurer la dissuasion nucléaire. Ils doivent être indétectables pendant leur mission dans toutes les mers du globe.



Figure 1 – Photographie du SNLE français Le Terrible (classe Le Triomphant) au large de Brest en Bretagne (Source : wikipedia.org)

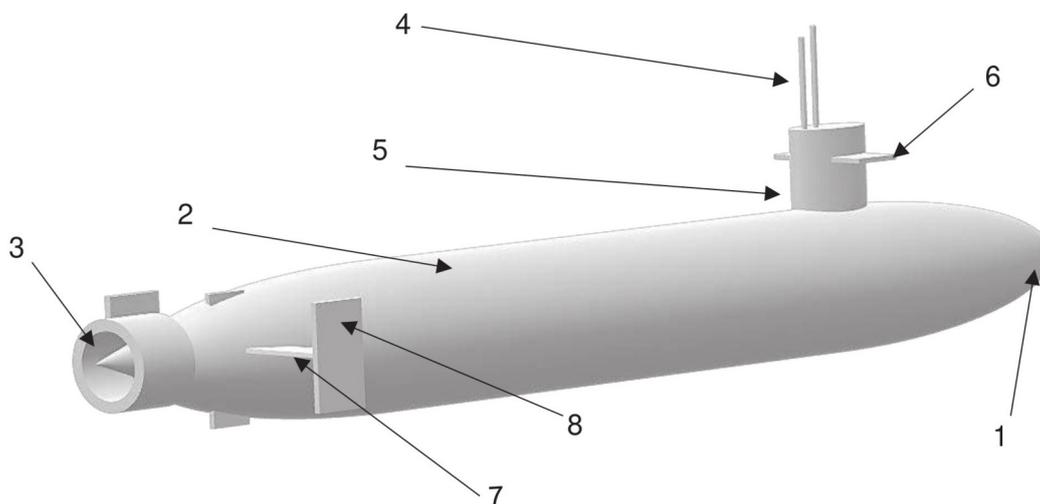


Figure 2- Schéma de principe d'un sous-marin et de quelques éléments

Légendes de la **figure 2** :

- (1) Dôme sonar d'étrave
- (2) Coque mince
- (3) Pompe-hélice
- (4) Mât périscopique (périscopes, antennes Hautes Fréquences...)
- (5) Massif
- (6) Barre de plongée avant ; (7) et (8) barre de plongée arrière et barre de direction

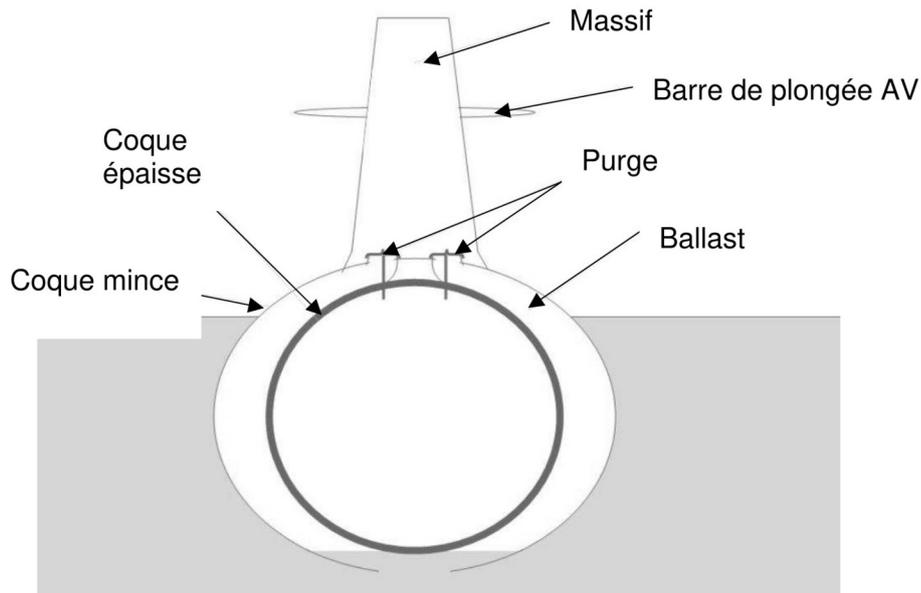


Figure 3- Schéma d'un sous-marin vu de face (Source : wikipédia.org)

Quelques données concernant le SNLE Le Triomphant :

Longueur : 138 m, soit 18 m de plus qu'un grand terrain de football.

Plus grande largeur : 12,5 m.

Déplacement en surface : 12 685 tonnes.

Déplacement en plongée : 14 335 tonnes (la tour Eiffel pèse au total 10 100 tonnes).

Vitesse maximale : plus de 25 nœuds (soit environ $47 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$).

Immersion : supérieure à 300 m (la valeur maximale est tenue secrète).

(Source : Commandant de sous-marins, Du Terrible au Triomphant, la vie secrète des sous-marins. Amiral François Dupont (2019, éditions Autrement)).

La **partie I** de ce sujet concerne quelques aspects de l'hydrostatique appliquée aux sous-marins.

La **partie II** s'intéresse au phénomène de cavitation qui joue un rôle important dans la discrétion acoustique d'un SNLE lors de sa mission.

On donne quelques valeurs et formules utiles en fin de problème. La masse volumique de l'eau de mer sera notée ρ_0 considérée comme constante dans tout le problème.

Partie I - Hydrostatique du sous-marin en plongée

On considère un volume élémentaire d'eau de mer $d\tau$ de dimensions dx, dy et dz centré sur un point M. On se place dans les coordonnées cartésiennes avec l'axe (Oz) vertical orienté vers le bas, le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est orthonormé direct.

- Q1.** Établir l'expression de l'équivalent volumique \vec{F}_V des forces de pression qui s'exercent sur ce volume élémentaire $d\tau$.
- Q2.** En plus de ces forces de pression, le volume élémentaire est soumis à la seule force de pesanteur. Donner sans démonstration l'expression de la force volumique associée. En déduire la condition d'équilibre locale (équation de l'hydrostatique).
- Q3.** Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ dans l'eau de mer à une profondeur z en fonction de la masse volumique ρ_0, g et z . On suppose que l'eau de mer est incompressible et homogène. On prendra $P(z=0) = P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa.
- Q4.** On cherche à déterminer la pression exercée par l'eau sur la coque interne (dite coque épaisse) du sous-marin (voir **figure 3**). Pour simplifier, on assimile l'ensemble de celui-ci à un cylindre de rayon R et de longueur L . On suppose que le sous-marin est en position horizontale dans l'eau et que son axe est à la profondeur z_c . Donner l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur le " sous-marin ". Que représente physiquement cette force ?

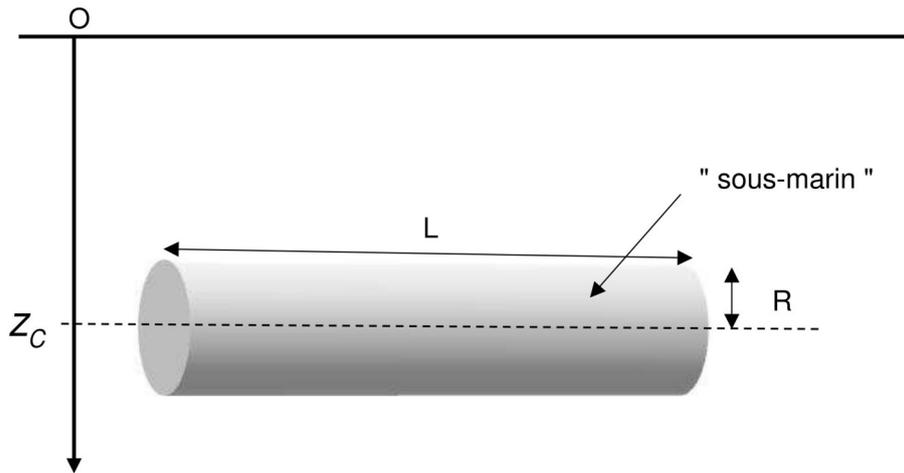


Figure 4- Schématisation d'un sous-marin

La **figure 3** montre la présence de ballasts entre la coque mince extérieure et la coque épaisse intérieure. Ce sont des réservoirs d'eau ou d'air pouvant être remplis ou vidés.

- Q5.** Expliquer qualitativement le rôle des ballasts et pourquoi la coque externe du sous-marin est dite " mince " alors que la coque interne est dite " épaisse ". L'acier de la coque interne est un acier spécial, le " 100 HLES ", qui peut résister à une " pression " de $100 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-2}$. Le sous-marin risque-t-il d'imploser à une profondeur $z_c = 300 \text{ m}$?

Partie II - Quelques aspects de la cavitation

La cavitation est la naissance de bulles de gaz ou de vapeur dans un liquide en mouvement à de grandes vitesses. Ce phénomène très complexe est responsable du mauvais fonctionnement des pompes, de l'érosion de la surface des hélices de navires et de l'apparition de vibrations et de bruit qui sont particulièrement gênants dans le cadre de la " discrétion acoustique " voulue pour un sous-marin de type SNLE. On s'intéresse ici à quelques aspects simples de la cavitation.

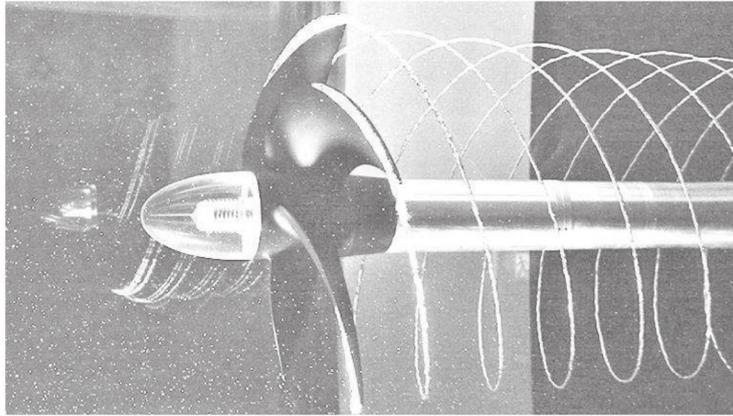


Figure 5- Cavitation d'extrémité de pale (Source : <http://www.voileetmoteur.com>)

On considère un tube de Venturi (voir **figure 6**) horizontal et symétrique dans lequel s'écoule un liquide de viscosité négligeable. La section droite maximale est notée S_1 et la section minimale au niveau du col est notée S_2 . On suppose que dans le tube, les conditions d'application du théorème de Bernoulli sont remplies.

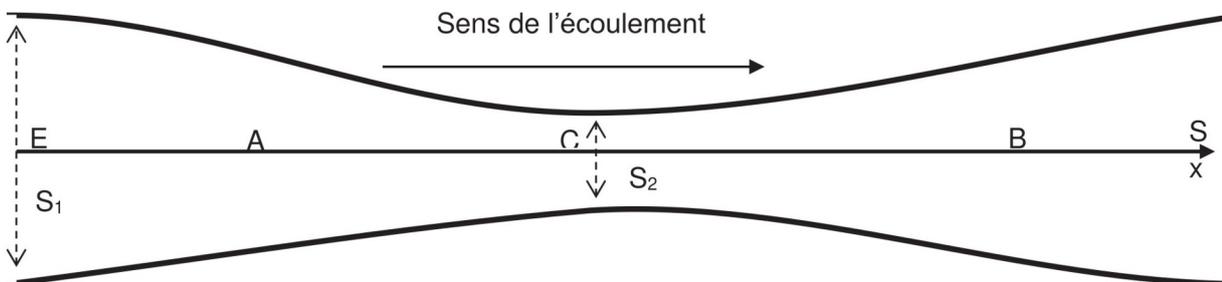


Figure 6- Tube de Venturi

- Q6.** L'écoulement est supposé unidimensionnel. Écrire une relation entre les vitesses v_1, v_2 et les sections S_1 et S_2 .
- Q7.** Rappeler les conditions d'application du théorème de Bernoulli. Exprimer la différence de pression $P(C) - P(E)$ en fonction de la vitesse v_1 et des sections S_1 et S_2 . Les points E et C sont situés sur l'axe des x au niveau de l'entrée du tube et de son col. Donner l'allure du diagramme $P(T)$ où T est la température de l'eau. On indiquera les différents domaines d'existence des phases ainsi que deux points caractéristiques à nommer. Si l'on considère un point M situé dans le domaine où l'eau est liquide, justifier alors la possible apparition d'une bulle de vapeur dans l'écoulement dans une région du tube de Venturi que l'on indiquera sur un schéma sur la copie.

- Q8.** Représenter clairement l'allure de la pression P en fonction des abscisses x des points E, A, C, B et S. Représenter de manière qualitative sur le même graphique l'allure de P en tenant compte cette fois de la viscosité du fluide. Comment s'appelle le phénomène responsable de cette modification ?
- Q9.** Un sous-marin est-il plus discret en eau chaude qu'en eau froide ? Si l'on suppose un diamètre de l'hélice de 10 m, et en raisonnant sur l'extrémité des pales uniquement, les bulles de cavitation apparaissent-elles en haut ou en bas de l'hélice ?

Afin de minimiser l'apparition des bulles de cavitation, les hélices des SNLE français sont carénées. L'hélice et son carénage forment la pompe-hélice.

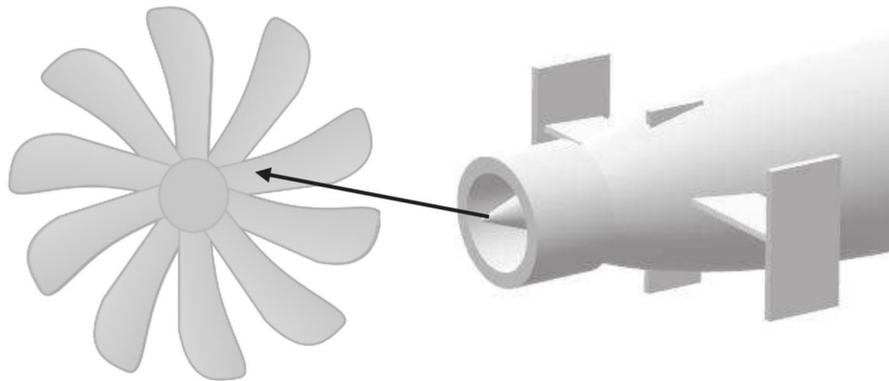


Figure 7- Hélice du sous-marin avec le carénage entourant celle-ci

Des études expérimentales montrent que le phénomène de cavitation est fortement corrélé avec l'existence de " germes " comme des impuretés ou à la présence de microbulles sphériques dans l'eau. La concentration des microbulles étant faible, on va supposer que les propriétés physiques de l'eau ne sont pas modifiées. L'écoulement est supposé non visqueux et incompressible dans toute la suite.

On considère une microbulle sphérique de centre O et de rayon $R(t)$ plongée dans l'eau. On pose $p_{\infty}(t)$ la pression de l'eau à l'infini où l'eau est au repos. À $t = 0$, la microbulle contient une masse m_0 de gaz dit inclus (de l'air par exemple) ainsi que de la vapeur d'eau ; son rayon est $R(t = 0) = R_0$ et la pression de l'eau à l'infini est $p_{\infty,0}$.

La pression de l'eau à l'infini évolue au cours du temps ce qui fait varier le rayon de la microbulle. La masse de gaz inclus est supposée constante au cours de l'évolution supposée isotherme de la microbulle.

On considère que l'écoulement est radial à symétrie sphérique. Les champs de vitesses et de pression dans l'eau peuvent s'écrire : $\vec{v} = v(r, t)\vec{e}_r$ et $p = p(r, t)$.

$$p(t)_\infty$$

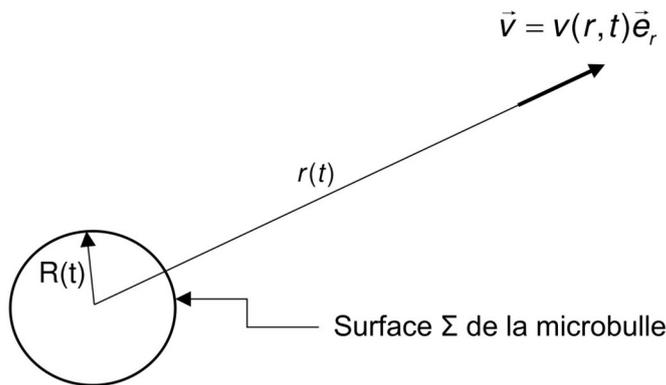


Figure 8- Schématisation de la microbulle

- Q10.** Écrire l'équation locale traduisant la conservation de la masse dans l'eau. Quelle relation peut-on déduire de l'imperméabilité de la paroi Σ de la microbulle ? À l'aide des données en fin de problème, déduire de ces deux relations la relation suivante :

$$v(r, t) = \frac{-A(t)}{r^2} .$$

Montrer que : $A(t) = -R^2(t) \frac{dR(t)}{dt}$.

- Q11.** Écrire l'équation d'Euler. En déduire l'expression de $\frac{\partial p(r, t)}{\partial r}$ en fonction de $\rho_0, r, A(t)$ et de ses dérivées temporelles. On négligera la pesanteur.

Par intégration, on peut montrer (ce n'est pas demandé ici) qu'on obtient l'équation de Rayleigh :

$$p(R, t) = p(t)_\infty + \rho_0 \left[R(t) \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] .$$

On s'intéresse à l'implosion d'une microbulle. On suppose pour simplifier l'étude qu'elle ne contient pas de gaz inclus, la pression à l'infini est maintenue constante et égale à $p(t)_\infty$, supérieure à la pression de vapeur saturante $p_{sat}(T)$. Dans ce cas, l'équation de Rayleigh peut être intégrée ; on trouve, après un calcul qui n'est pas demandé ici :

$$\frac{dR(t)}{dt} = - \sqrt{\frac{2}{3\rho_0} (p_{\infty,0} - p_{sat}(T)) \left[\left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3 - 1 \right]} .$$

- Q12.** Exprimer la durée τ , appelée temps de Rayleigh, que met la bulle à disparaître en fonction de $\rho_0, p_{\infty,0}, p_{sat}(T)$ et R_0 ainsi que de l'intégrale suivante dont on donne la valeur approchée. On pourra poser $u = R/R_0$:

$$J = \int_0^1 \sqrt{\frac{u^3}{1-u^3}} du = 0,747 .$$

Calculer numériquement τ avec les valeurs suivantes :

$\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $p_{\infty,0} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $p_{sat}(T) = 2,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, $R_0 = 2,0 \text{ mm}$. Commenter par rapport à la durée typique d'évolution d'une bulle dans une boisson pétillante.

Données du problème

- Intensité du champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau de mer : $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Cette valeur sera supposée constante dans tout le problème.

- La valeur moyenne temporelle du produit de deux fonctions sinusoïdales f et g de même période peut être calculée à partir de leurs représentations complexes à l'aide de la formule :

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(f \times \underline{g}^*) \quad \text{où } \underline{g}^* \text{ est le conjugué de } \underline{g}$$

$$- \overline{\text{rot}(\text{rot} \vec{A})} = \overline{\text{grad}(\text{div} \vec{A})} - \overline{\Delta \vec{A}}$$

$$- \overline{\text{div}(\text{rot} \vec{A})} = 0$$

$$- \text{En coordonnées sphériques : } \overline{\text{div} \vec{A}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}$$

$$- (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \text{ en coordonnées sphériques, pour } \vec{v} = v_r(r, t) \vec{e}_r$$

$$- \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

Problème N°2 :

« C'est assez ! » dit la baleine, je me cache à l'eau car j'ai le dos fin.

Ce problème est composé de trois parties totalement indépendantes.

Les figures numérotées sont utiles au candidat pour traiter le sujet. Par commodité de représentation les échelles ne sont pas respectées. Les simples illustrations, non numérotées, proviennent du site www.bing.com/images/phoques et dauphins.

Le sujet, prévu pour durer deux heures, s'intéresse à des aspects de la vie de certains mammifères marins comme les phoques ou les cétacés (dont font partie les baleines, les cachalots et les dauphins). Ces espèces aux capacités remarquables, sont réputées être intelligentes et certains individus semblent vouloir avoir une interaction avec l'homme. De la baleine tueuse au dauphin sauveur, les cétacés n'ont cessé d'alimenter notre imaginaire.

Les cétacés sont les seuls mammifères à vivre exclusivement dans la mer. Devoir respirer avec des poumons et maintenir leur température interne constante a nécessité une adaptation qui en fait des animaux exceptionnels. L'étude scientifique de ces espèces, dont certaines sont en voie de disparition, est menée par de nombreuses équipes de recherche en collaboration avec les associations de défense des espèces animales.

La **partie I**, faisant appel à la thermodynamique, s'intéresse à l'homéothermie des mammifères marins en prenant l'exemple d'un phoque.

La **partie II**, faisant appel à l'étude physique des ondes acoustiques, s'intéresse à l'écholocalisation des dauphins.

La **partie III** s'intéresse au champ magnétique terrestre car, selon certaines hypothèses, ce serait celui-ci qui permettrait aux baleines de suivre leur chemin de migration.

Partie I - Homéothermie des phoques

La loi phénoménologique de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit la proportionnalité entre la densité de flux thermique \vec{j}_d et le gradient de température :

$$\vec{j}_d = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T).$$

Q1. Quels sont le nom et la dimension du coefficient λ ? En déduire son unité SI. Justifier physiquement le sens du vecteur densité de flux thermique \vec{j}_d .

On se place en coordonnées cylindriques (**figure 1**) pour étudier une situation physique stationnaire, unidimensionnelle à symétrie cylindrique, telle que la température en un point M (r, θ, z) ne dépend que de r .

Le gradient de la température $T(r)$ est égal à $\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \left(\frac{dT}{dr}\right) \vec{e}_r$.

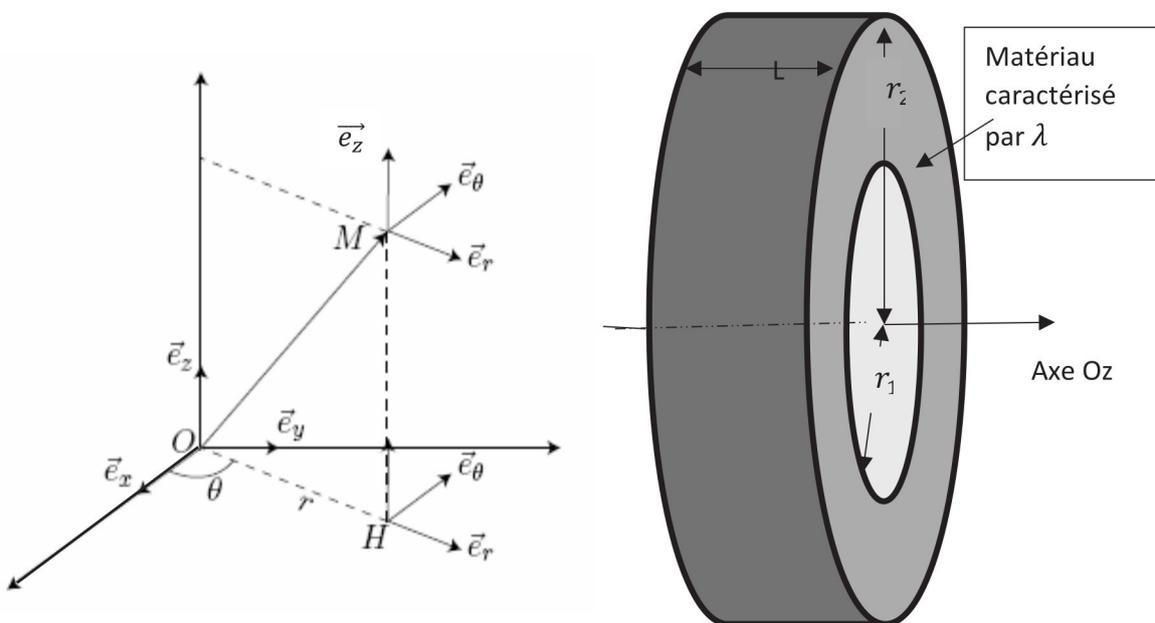


Figure 1 – Coordonnées cylindriques

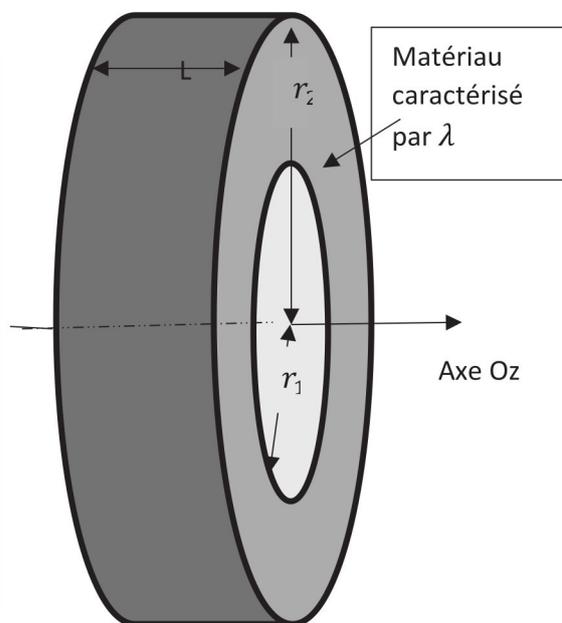


Figure 2 – Conducteur thermique

On considère un cylindre conducteur thermique creux de longueur L , occupant l'espace $r_1 < r < r_2$ constitué d'un matériau de conductivité λ (**figure 2**) dans lequel il n'y a aucune source thermique dans le matériau.

Q2. Quand on effectue un bilan énergétique pour le matériau compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$, on obtient l'équation différentielle vérifiée par le flux thermique :

$$\frac{d(r \cdot j_d(r))}{dr} = 0.$$

En déduire la loi $T(r)$ en notant T_1 et T_2 les températures des rayons r_1 et r_2 :

$$T_1 = T(r = r_1) \text{ et } T_2 = T(r = r_2).$$

Q3. Exprimer la puissance thermique φ qui traverse le cylindre de rayon r et de longueur L , dans le sens des r croissants.

Q4. En déduire que la résistance thermique du cylindre s'exprime par $R = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

Q5. Prenons l'exemple d'un phoque marin de taille moyenne de masse $M = 150$ kg, vivant dans un océan à la température $\theta_0 = 2$ °C. On le modélise (**figure 3**) par un cylindre de longueur $L = 1,6$ m, de rayon $r = 25$ cm, qui ne perd de l'énergie que par sa surface latérale, considérée comme " partiellement isolée " de l'eau froide par une épaisseur $e = 50$ mm de graisse de coefficient caractéristique $\lambda = 7,0 \cdot 10^{-2}$ SI. Sa température d'existence est égale à $\theta_{eq} = 36,5$ °C supposée uniforme. Il pêche 4,0 kg de poisson pour sa consommation journalière. Cette nourriture lui fournit une énergie de 4 600 kJ par kg de poisson consommé.

Évaluer l'énergie thermique perdue par le phoque en une journée et la comparer à l'énergie apportée par sa nourriture.

Partie II - Écholocation des dauphins

Le sens le plus développé chez les cétacés est celui de l'audition, particulièrement chez les cétacés à dents qui sont dotés de la fonction d'écholocation, sorte de sonar naturel.

On rappelle que les ondes sonores dans les fluides obéissent à une équation de D'Alembert dans le cadre de l'approximation acoustique. Par exemple, en situation unidimensionnelle, la surpression $p(x, t)$ obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

dans laquelle μ_0 est la masse volumique du fluide à l'équilibre et χ_s le coefficient de compressibilité isentropique de ce même fluide.

Q6. A quelle vitesse les ondes sonores se propagent-elles dans l'air à température et pression ambiantes ?

Q7. Rappeler en quoi consiste " l'approximation acoustique ". Quelle est la dimension de la quantité $\frac{1}{\mu_0 \chi_s}$?

Q8. Évaluer la célérité c d'une onde sonore qui se propage dans de l'eau de mer de masse volumique valant $\mu_0 = 1\,030$ kg · m⁻³ et de coefficient de compressibilité isentropique égal à $\chi_s = 4,9 \cdot 10^{-10}$ Pa⁻¹. Commenter la valeur obtenue.

Pour repérer les bancs de poisson ou les obstacles, les dauphins émettent des " clics " ultrasonores. L'appréciation du temps de retour de l'onde sonore réfléchi sur l'obstacle et de sa puissance permet au dauphin d'évaluer le caractère plus ou moins dense de l'obstacle, sa distance et sa vitesse relative. Le dauphin modifie la quantité de " clics " émis par seconde au fur et à mesure qu'il se rapproche ou s'éloigne de sa proie en émettant au maximum 600 " clics " par seconde.

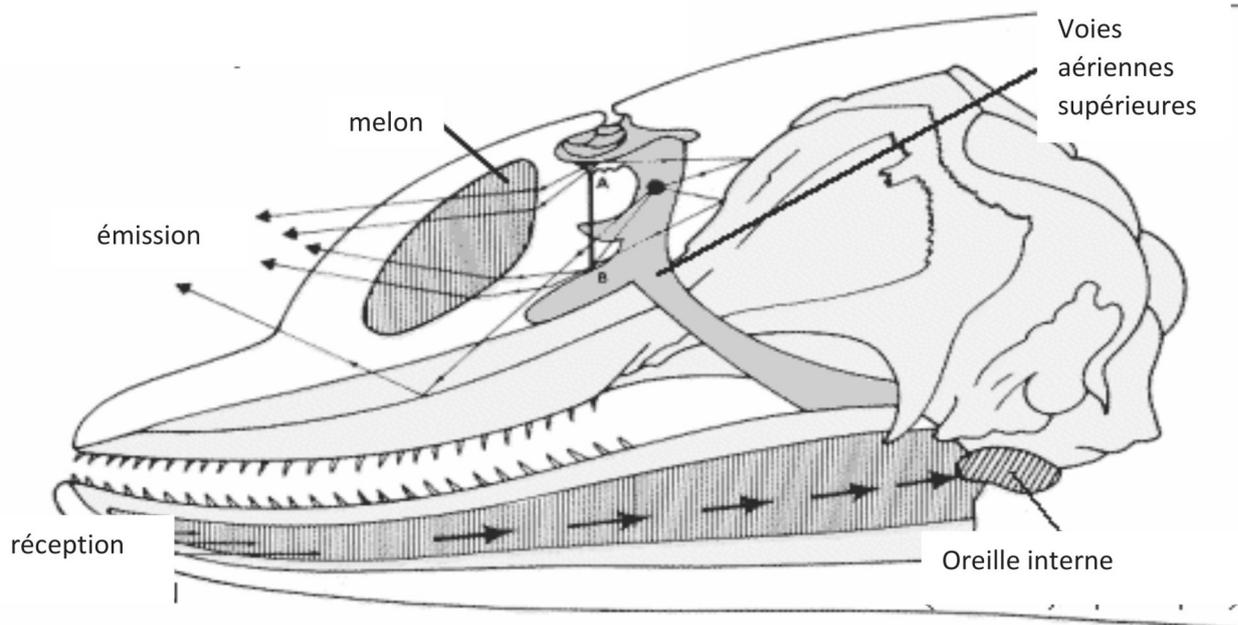


Illustration Eric Poncelet d'après Norris

Figure 4 – Émetteur et récepteur chez le dauphin

Caractéristiques du son émis

Dans la suite, on admet que les concepts introduits à propos des ondes de lumière se généralisent aux ondes acoustiques, ce qui permet d'utiliser le vocabulaire de l'optique géométrique et celui de l'optique ondulatoire.

L'émetteur est au niveau de la bosse caractéristique du dauphin où une cavité produit des vibrations. Les ondes traversent ensuite une structure de graisses variées appelée melon (**figure 4**) qui forme une lentille acoustique focalisante engendrant une onde acoustique cohérente sphérique.

La **figure 5** représente le spectre en fréquence d'un " clic " et la **figure 6** donne la représentation temporelle d'un " clic " au point d'émission.

Q9. En utilisant les **figures 5** et **6**, préciser dans quel domaine sonore ce " clic " est émis. Évaluer l'ordre de grandeur de sa largeur spectrale à mi-hauteur. En déduire le temps de cohérence τ_c de la source. Évaluer la durée δt du " clic " en τ_0 . Comparer au temps de cohérence τ_c . Comparer au temps le plus court entre deux clics successifs.

Évaluer la longueur de cohérence temporelle L_c de la source. Commenter.

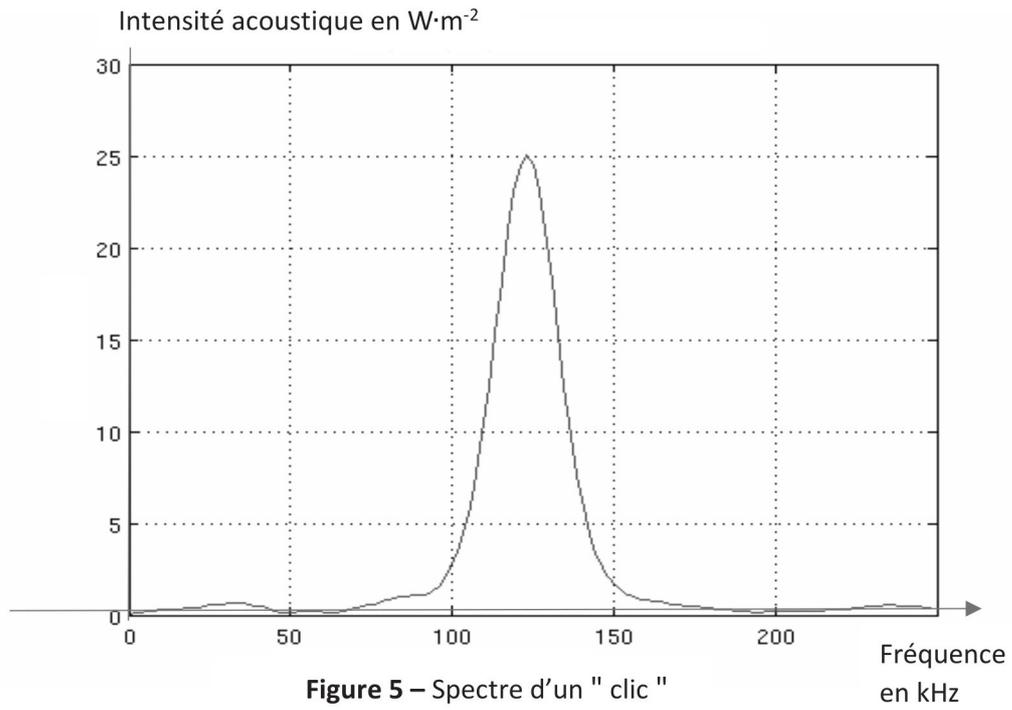


Figure 5 – Spectre d'un " clac "

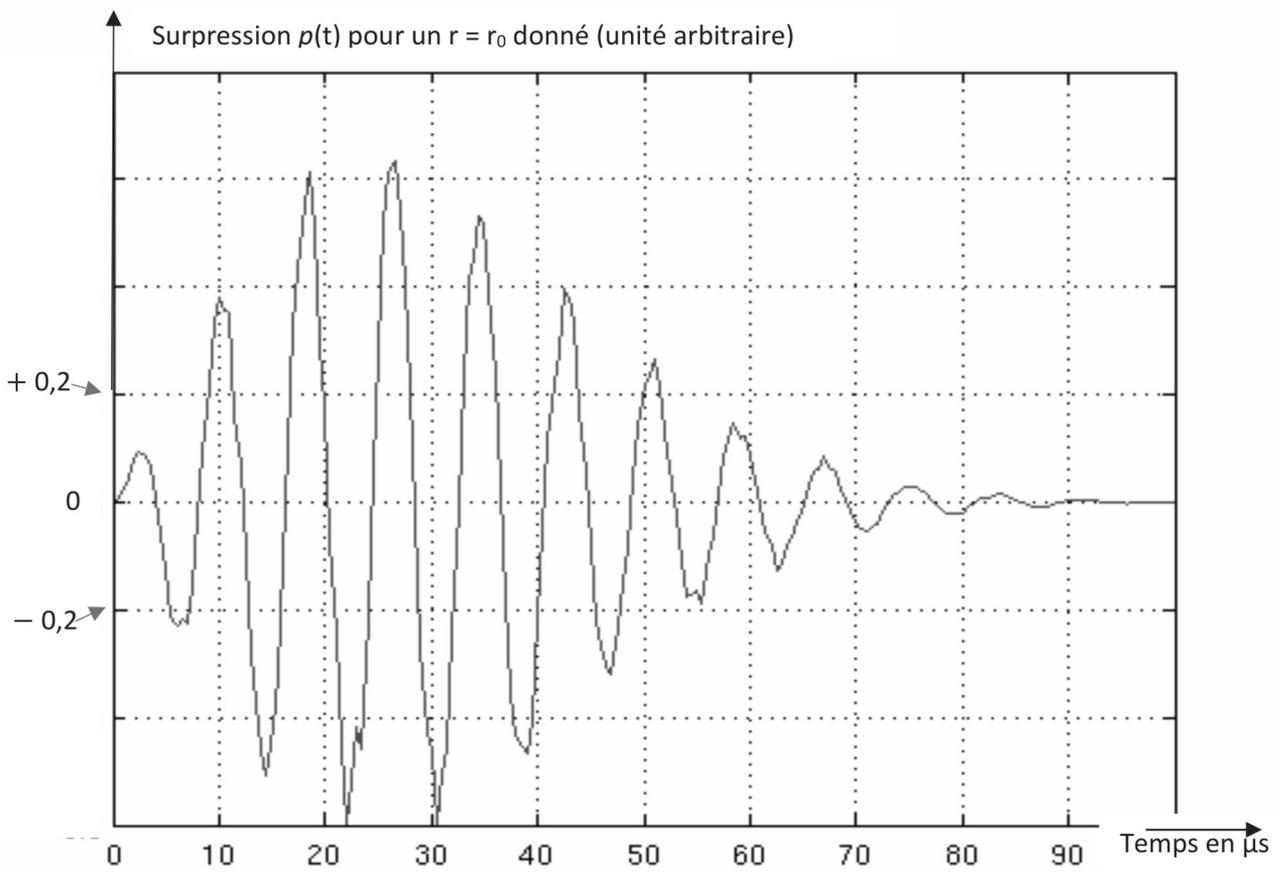


Figure 6 – Représentation temporelle d'un " clac "

Cavité résonante émettrice

En plongée, le dauphin emmagasine dans ses poumons de l'air qu'il ne relâche pas. Un ajustement de la taille des sacs d'air lui permet d'obtenir des fréquences de résonance variées comme dans une cavité, dite de Helmholtz, modélisée en **figure 7**. C'est la présence d'un liquide cristallin qui lui permet d'obtenir des fréquences beaucoup plus élevées que celles obtenues avec des tissus normaux comme le larynx humain.

On se propose d'étudier le principe de la cavité de Helmholtz à l'aide d'un modèle linéaire simple.

Un cylindre de volume V , appelé cavité, communique avec l'extérieur par un petit tube de volume $sl \ll V$. Sous l'effet d'une perturbation la section, initialement en x , se déplace en $x + \xi(x, t)$, $\xi(x, t)$ étant le déplacement de la section.

On peut considérer que tout se passe comme si l'élément de fluide contenu entre x et $x + \delta x$ dans le petit tube se déplace comme un piston soumis à la pression P_{ext} d'un côté et $P_{ext} + p(\xi)$ de l'autre côté (**figure 7**) avec $p(\xi = 0) = 0$.

Le volume de fluide $V + sx$, de masse volumique ρ , évolue de manière adiabatique en obéissant à la loi de Laplace avec un coefficient γ .

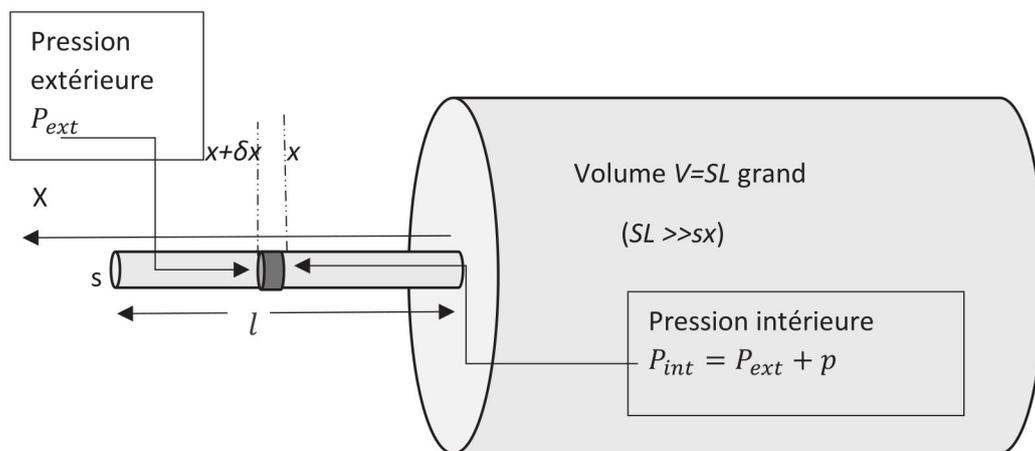


Figure 7 – Cavité de Helmholtz

Q10. Justifier qu'on peut écrire au premier ordre $p(\xi) = -\gamma \frac{s\xi}{V} P_{ext}$, en considérant $p(\xi)$ infiniment petit du premier ordre au même titre que $\frac{sx}{V}$ et $\frac{s\xi}{V}$.

En appliquant la deuxième loi de Newton à l'élément de fluide, établir l'équation différentielle à laquelle obéit $\xi(t)$.

Quelle est la fréquence caractéristique du mouvement ? On l'exprimera en fonction de V , s , ρ , γ , P_{ext} et δx .

Propagation aller-retour

Le faisceau s'atténue au fur et à mesure de sa propagation dans l'eau : le phénomène d'écholocalisation ne peut pas repérer des obstacles à plus de 100 m.

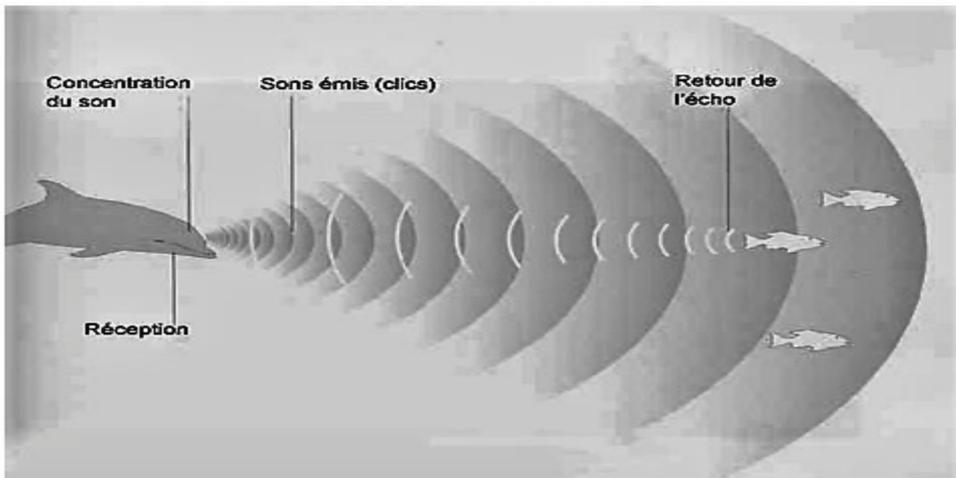
On admet que l'intensité acoustique obéit à une loi exponentielle d'atténuation dans l'eau de la forme :

$$I(r) = I(r = 0) \exp(-\alpha r).$$

La réflexion du faisceau par l'obstacle entraîne une modification de l'intensité acoustique au niveau de l'obstacle. Cette modification, liée aux impédances acoustiques Z_{eau} de l'eau et Z_{obst} du matériau de l'obstacle, est donnée par :

$$\frac{I_{réfléchi}}{I_{incident}} = R = \frac{(Z_{eau} - Z_{obst})^2}{(Z_{eau} + Z_{obst})^2}.$$

Le mouvement relatif dauphin-obstacle (**figure 8**) crée un effet Doppler qui modifie la fréquence du faisceau réfléchi par rapport à celle f du faisceau incident. On peut établir la formule $U = \frac{\delta f}{2f \cos \theta} c$ avec U la norme de la vitesse relative dauphin-obstacle et δf la modification de la fréquence.

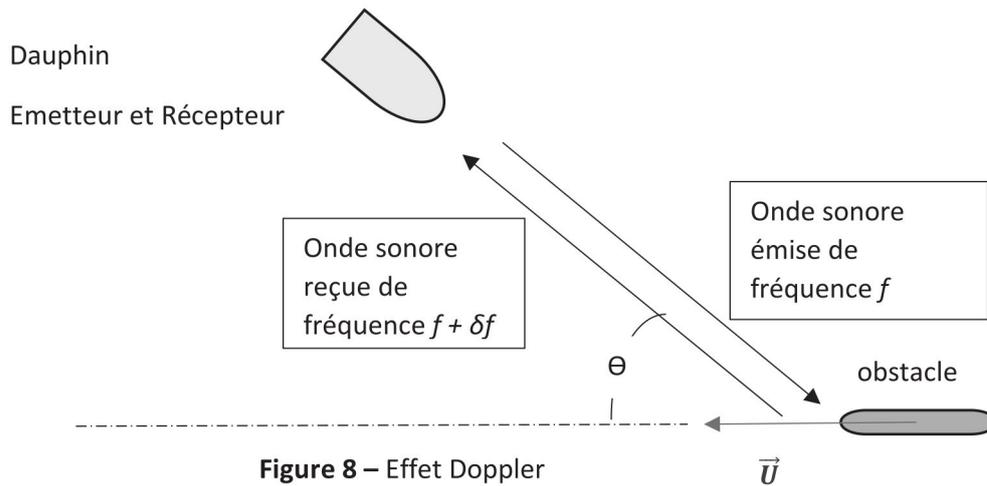


Q11. Évaluer le coefficient d'atténuation α sachant que l'intensité est divisée par 2 en 50 m. Quelle est l'unité de l'impédance acoustique ?

Calculer le rapport R sachant que l'impédance de l'eau vaut $Z_{eau} = 1\,480$ SI et celle d'un poisson (obstacle) vaut $Z_{obstacle} = 1\,540$ SI.

Évaluer l'ordre de grandeur du rapport Q des intensités de l'onde reçue par le dauphin et de l'onde émise par celui-ci pour un banc de poissons à 75 m du dauphin.

En assimilant le "clic" à une onde harmonique de fréquence $f = 125$ kHz, quelle est la vitesse relative U du banc de poissons détecté par le dauphin, qui se déplace sur la même droite que le banc de poisson, sachant que la modification de fréquence vaut $\delta f = 1$ kHz ?



Partie III - Migration des baleines

Une hypothèse appuyée sur de nombreux indices, mais encore à préciser, est que les cétacés disposent d'un sens magnétique qu'ils utiliseraient pour migrer sur de longues distances. Les relevés par satellite des baleines à bosse au large de l'archipel d'Hawaï montrent que les trajectoires de ces dernières suivent le nord magnétique avec une grande précision.

Certains biologistes pensent que les échouages, régulièrement observés (depuis l'Antiquité au moins), sont dus à ce sens magnétique. Dans un certain nombre de cas, une corrélation a effectivement été trouvée entre anomalies magnétiques au sol et zones d'échouages fréquents.

Rappel : un moment magnétique $\vec{M} = M\vec{e}_z$ (**figure 9**) placé en un point O choisi comme origine d'un repère de coordonnées sphériques crée, en un point P (ρ, θ, φ) éloigné, un champ magnétique égal à :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^3} (2\cos\theta\vec{e}_\rho + \sin\theta\vec{e}_\theta).$$

Placé dans un champ extérieur $\vec{B}_{ext}(O)$, un dipôle magnétique est soumis à des actions de moment $\vec{\Gamma}(O) = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}(O)$ et de résultante $\vec{F} = \overrightarrow{(\vec{M} \cdot \text{grad})} \vec{B}_{ext}$.

L'énergie potentielle d'interaction vaut $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}(O)$.

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques est :

$$d\vec{l} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + \rho\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi.$$

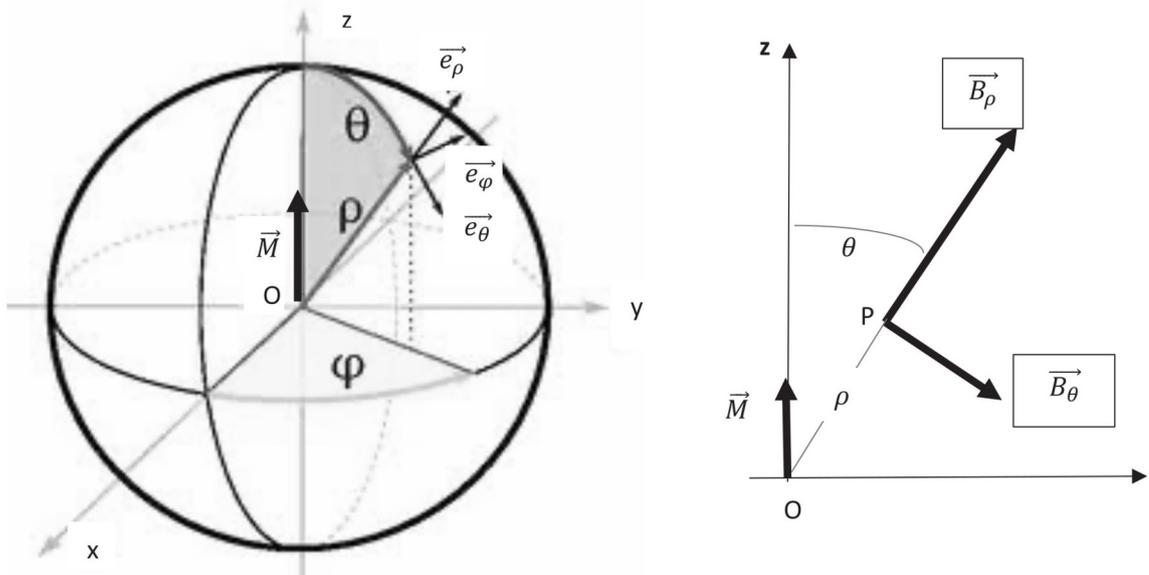


Figure 9 – Moment dipolaire

Q12. On considère que le champ magnétique terrestre est celui d'un dipôle magnétique de moment magnétique \vec{M} (figure 10) placé au centre de la Terre. L'angle entre sa direction et l'axe de rotation de la Terre vaut environ 11° .

Établir l'équation des lignes de champ et tracer leur allure. Donner le sens et la direction du dipôle magnétique terrestre. Expliquer pourquoi la boussole, qui est elle-même un dipôle magnétique, indique grosso-modo le Nord géographique.

Q13. Le champ magnétique au pôle Nord géographique vaut $B = 6,0 \cdot 10^4 \text{ nT}$. En déduire l'ordre de grandeur du moment dipolaire M sachant que la perméabilité magnétique de l'air vaut $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ et que le rayon de la terre vaut 6 400 km.

Le caractère magnéto-réceptif des baleines à bosse s'expliquerait par la présence de cristaux de magnétite (matériau constitutif des boussoles) dans leur cerveau, ce qui les doterait d'une boussole interne. Il semblerait que les zones d'échouage soient les zones d'anomalie magnétique c'est-à-dire les zones où le champ magnétique terrestre s'écarte beaucoup de la valeur moyenne.

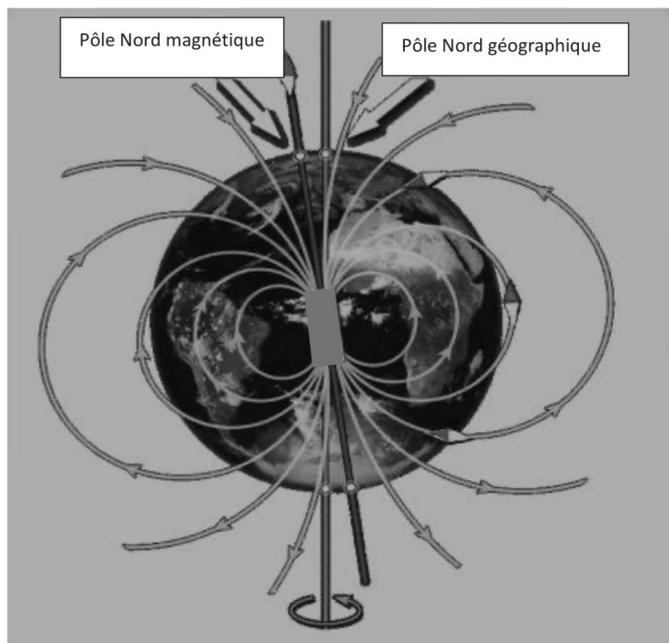


Figure 10 – Lignes de champ du champ magnétique terrestre

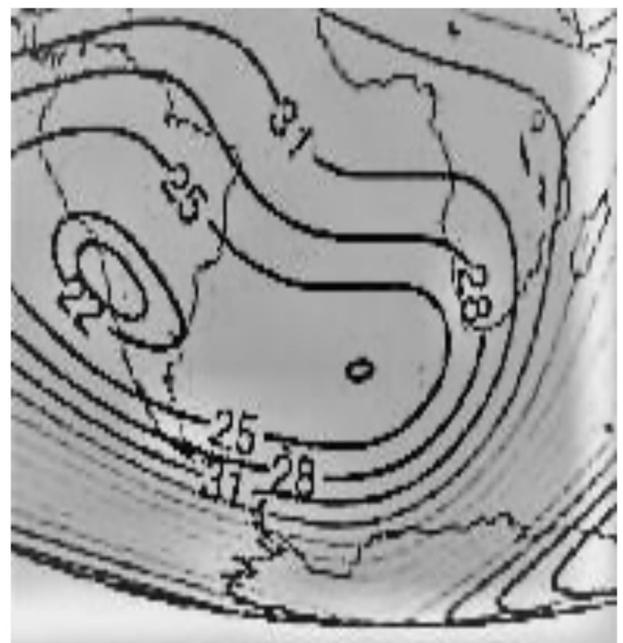


Figure 11 – Carte équi-intensité du champ terrestre en μT entre Amérique du Sud et Antarctique

Au cours de la migration de 6 000 km depuis la Polynésie vers l'Antarctique, les baleines à bosse devraient suivre la ligne d'équi-intensité du champ qui correspond à la valeur de $3,33 \cdot 10^4$ nT. On peut observer alors sur la carte (**figure 11**) que les lignes se rapprochent beaucoup vers le continent Antarctique et qu'il y a une zone de champ beaucoup moins intense au large de l'Amérique du Sud.

Q14. Avec un déplacement vers le Nord ou vers le Sud à peu près équivalent (800 km) on peut passer de $3,33 \cdot 10^4$ nT à $2,67 \cdot 10^4$ nT ou à $4,67 \cdot 10^4$ nT : quelles sont les variations relatives correspondantes de l'énergie potentielle d'interaction entre la baleine et le champ magnétique terrestre en supposant la boussole interne colinéaire au champ magnétique terrestre ? Commenter en admettant que les baleines ont des difficultés à maintenir leur route le long de la ligne de champ, si la variation relative d'énergie potentielle locale, linéaire, orthogonalement à la ligne de champ, dépasse 0,025 % par km.

----- **FIN** -----