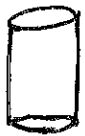


Rebonds d'une goutte d'eau (Nîmes PC 2013)

I Formes des gouttes.

1)  $V = \pi a^2 e$
 $S = 2\pi a^2 + 2\pi a e$
 $S = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{e}{a}\right)$

$$E_{pf} = AS = 2\pi a^2 A + \frac{2\pi a^2 e A}{a}$$

$$E_{p,t} = 2\pi a^2 A + \frac{2AV}{a}$$

2) $\frac{dE_{p,t}}{da} = 4\pi a A - \frac{2AV}{a^2}$

$$\left(\frac{dE_{p,t}}{da}\right)_{a_0} = 0 = 4\pi a_0 A - \frac{2AV}{a_0^2}$$

$$a_0^3 = \frac{2AV}{4\pi A} \Rightarrow a_0 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

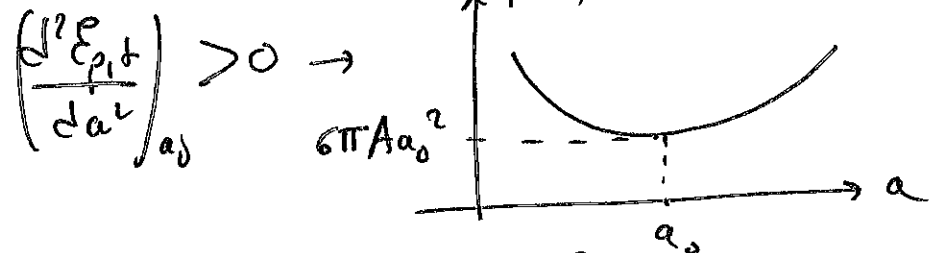
$$\left[l_0 = 2a_0\right]$$

$$\uparrow$$

$$V = 2\pi a_0^3 = \pi a_0 e$$

$$\frac{d^2 E_{p,t}}{da^2} = 4\pi A + \frac{4AV}{a^3}$$

$$\left(\frac{d^2 E_{p,t}}{da^2}\right)_{a_0} = 4\pi A + 4AV \times \frac{2\pi}{V} = 4\pi A(1+2)$$



3) localement on peut faire un DL de Taylor à l'ordre 2:

$$E_{p,t}(a) = E_{p,t}(a_0) + (a-a_0) \left(\frac{dE_{p,t}}{da}\right)_{a_0} + \frac{1}{2} (a-a_0)^2 \left(\frac{d^2 E_{p,t}}{da^2}\right)_{a_0}$$

$$E_{p,t}(a) = E_{p,t}(a_0) + \frac{1}{2} (a-a_0)^2 \times 12\pi A$$

$$E_{p,t}(a) = 6\pi A (a-a_0)^2 + E_{p,t}(a_0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} k (l-l_0)^2$$

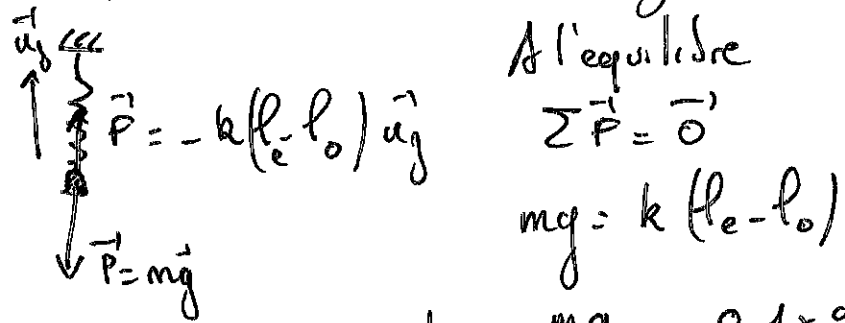
$$k \Leftrightarrow 12\pi A$$

$$k = 12\pi \times 7 \cdot 10^{-2}$$

$$l_0 \Leftrightarrow a_0 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$k = 2,6 \text{ N/m}$$

pour un ressort de référence qui
s'allonge de $\Delta l = 1 \text{ cm}$ lorsqu'on lui
suspend une masse de $100 \text{ g} = m$



$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{0,1 \times 9,8}{1 \cdot 10^{-2}} = 98 \text{ N/m}$$

Cette valeur est bien supérieure à celle de la
goutte. (Intérêt du commentateur?)

$$4) E_{p,g} = mg z_0 = \mu_e V g \times \frac{e}{2} = \frac{\mu_e V g \times V}{2} \frac{1}{a^2 \pi}$$

$$\text{Or } V = 2\pi a_0^3$$

$$E_{p,g} = \frac{\mu_e \times 4\pi g a_0^6}{2 a^2 \pi} = \left[\frac{2\pi \mu_e g a_0^6}{a^2} \right] = E_{p,g}$$

$$5) E_p = E_{p,t} + E_{p,g} = 2\pi a^2 A + \frac{2AV}{a} + \frac{\pi \mu_e g a_0^6}{a^2}$$

$$\frac{dE_p}{da} = 4\pi a A - \frac{2AV}{a^2} - \frac{4\pi \mu_e g a_0^6}{a^3}$$

$$\left(\frac{dE_p}{da} \right)_{a_1} = 0 \text{ ssi } 4\pi a_0 (1+\varepsilon) - \frac{2AV}{a_0^2 (1+\varepsilon)^2}$$

$$- \frac{4\pi \mu_e g a_0^6}{a_0^3 (1+\varepsilon)^3} = 0$$

$$0 = 4\pi a_0 A (1+\varepsilon) - 4\pi a_0 A (1-2\varepsilon) - 4\pi a_0^3 \mu_e g (1-3\varepsilon)$$

$$A(1+\varepsilon) - A(1-2\varepsilon) - a_0^2 \mu_e g (1-3\varepsilon) = 0$$

$$\varepsilon(A + 2A + 3a_0^2 \mu_e g) = a_0^2 \mu_e g$$

$$\varepsilon = \frac{a_0^2 \mu_e g}{3A + 3a_0^2 \mu_e g}$$

$$\text{AN: } \varepsilon = \frac{(1,0 \cdot 10^{-3})^2 \times 1,0 \cdot 10^3 \times 9,8}{3 \times 7,0 \cdot 10^{-2} + 3 \times (1,0 \cdot 10^{-3})^2 \times 1,0 \cdot 10^3 \times 9,8}$$

$$\varepsilon = 0,041 \ll 1$$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow a_1 > a_0$ écrasement de la
goutte lors du choc.

I) Modèle mécanique du rebond

6) Syst: { la goutte }

À $t=0$, la longueur du ressort est égale à la longueur à vide. Or le patin est de masse nulle donc la longueur à vide est égale à la longueur à l'équilibre. (pas d'élongation du ressort par le patin) le système ne subit pas d'action extérieure autre que son poids (en particulier ~~pas~~ frottements de l'air) donc pas de déformation du système

$$\hookrightarrow \boxed{e(t) = e_0 = \text{cte}}$$

7) Pour les mêmes raisons (pas d'autres forces que le poids, le système est en chute libre.

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (h + e_0) \quad \text{le système touche le sol pour } z(t_0) = e_0$$

$$e_0 + h - e_0 = \frac{1}{2}gt_0^2 \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v(t_0) = |-gt_0| \rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \times 9,8 \times 10 \cdot 10^{-2}} = \underline{1,4 \text{ m/s}}$$

8) PFD sur la masse dans R_T galiléen:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{négligée}} - f\dot{e}(t)\vec{u}_j - k(e(t) - e_0)\vec{u}_j$$

$$\hookrightarrow \vec{u}_j \quad m \ddot{j} = -f\dot{e} - k(e - e_0)$$

$$\text{On pose } \varepsilon = e(t) - e_0$$

Comme le patin touche le sol $g(t) = e(t)$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{e} \quad \text{et} \quad \ddot{\varepsilon} = \ddot{e} = \ddot{j}$$

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + \frac{f}{m}\dot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0}$$

$$\text{On pose } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_0}{Q} = \frac{f}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{array} \right. \rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{f} \sqrt{km}} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

g) On résout l'éq. diff:

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

Or $Q^2 \gg 1$ Donc $\Delta < 0 \rightarrow$ régime pseudo périodique.

polynôme caractéristique:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\hookrightarrow r_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j \sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2} \right)}}{2} \approx -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0$$

$$\mathcal{E}(t) = \alpha e^{r_+ t} + \beta e^{r_- t}$$

$$\text{Soit } \mathcal{E}(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left[B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t) \right]$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) = & -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left[B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t) \right] \\ & + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left[-B \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right] \end{aligned}$$

$$\text{CI: } \mathcal{E}(t=0) = 0 = B$$

$$\mathcal{E}(t=0) = -V_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} B + C \omega_0$$

$$\hookrightarrow C = -\frac{V_0}{\omega_0}$$

$$\text{finalement } \mathcal{E}(t) = -\frac{V_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t)$$

10) Un extremum local est atteint par $\mathcal{E}(t)$ en $t = T_n$ pour $\sin(\omega_0 T_n) = 1$

$$\text{ie } \omega_0 T_n = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow T_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\omega_0} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{E}(T_n) = -\frac{V_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2(n+1)\pi}{2\omega_0}\right)$$

$$\mathcal{E}(T_n) = -\frac{V_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{(n+1)\pi}{2Q}\right)$$

L'oscillation est perceptible si $|\mathcal{E}(T_n)| \gg \frac{|\mathcal{E}(T_0)|}{10}$

$$\frac{V_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{(n+1)\pi}{2Q}\right) \gg \frac{V_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\pi}{2Q}\right) < \frac{1}{10}$$

$$-\frac{(n+1)\pi}{2Q} \leq \ln\left(\frac{1}{10} \exp\left(-\frac{\pi}{2Q}\right)\right) = -\frac{\pi}{2Q} - \ln 10$$

$$n+1 \geq \frac{2Q}{\pi} \left(\frac{\pi}{2Q} + \ln 10 \right)$$

$$n \geq \frac{2Q}{\pi} \ln 10 = \frac{10}{\pi} \ln 10 = 7,3$$

$$\boxed{n=7}$$

11) lorsque la goutte est en contact avec le sol,

BFE au niveau du patin:

$$\vec{O} = \vec{R} - f\dot{\epsilon}(1-\vec{u}_y) - k(\epsilon(1-\epsilon_0))\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_y \quad R - f\dot{\epsilon} - k\epsilon = 0$$

$$\underline{R = f\dot{\epsilon} + k\epsilon}$$

12) Condition de décollement: $R = 0$

$$\sin(\omega_0 \tau) + \frac{1}{Q} \cos(\omega_0 \tau) = 0$$

$$\tan(\omega_0 \tau) = -\frac{1}{Q} \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{\omega_0} \left(p\pi - \arctan\left(\frac{1}{Q}\right) \right) \quad p \in \mathbb{Z}$$

Avec $p=1$;

$$\tau = \frac{6,3 \cdot 10^{-6}}{2,6} \left(\pi - \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \right) = \underline{4,6 \cdot 10^{-3} \text{ s}}$$

D'après le graphe, $\tau_{\text{exp}}(a_0 = 1 \text{ mm}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

On obtient une durée du son sdg.

Si on néglige le terme en $\frac{1}{Q}$

$$\tau \simeq \frac{\pi}{\omega_0} = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{4,9 - 4,6}{4,6} = \underline{6,7 \%}$$

13) Si on accepte l'approximation $\tau \simeq \frac{\pi}{\omega_0}$

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \sqrt{\frac{\mu_e V}{k}} = \pi \sqrt{\frac{\mu_e}{k}} (2\pi a_0)^{3/2}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{8\pi^5 \mu_e}{k}} a_0^{3/2} \rightarrow \log \tau = \frac{3}{2} \log a_0 + \beta$$

On observe que les points représentant $\log(\tau)$ en fonction de $\log(a_0)$ semblent bien aléatoirement répartis autour d'une droite.

$$\text{pour } \begin{cases} (a_0)_1 = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ m} \rightarrow (\tau)_1 = 10^{-3} \text{ s} \\ (a_0)_2 = 10^{-3} \text{ m} \rightarrow (\tau)_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

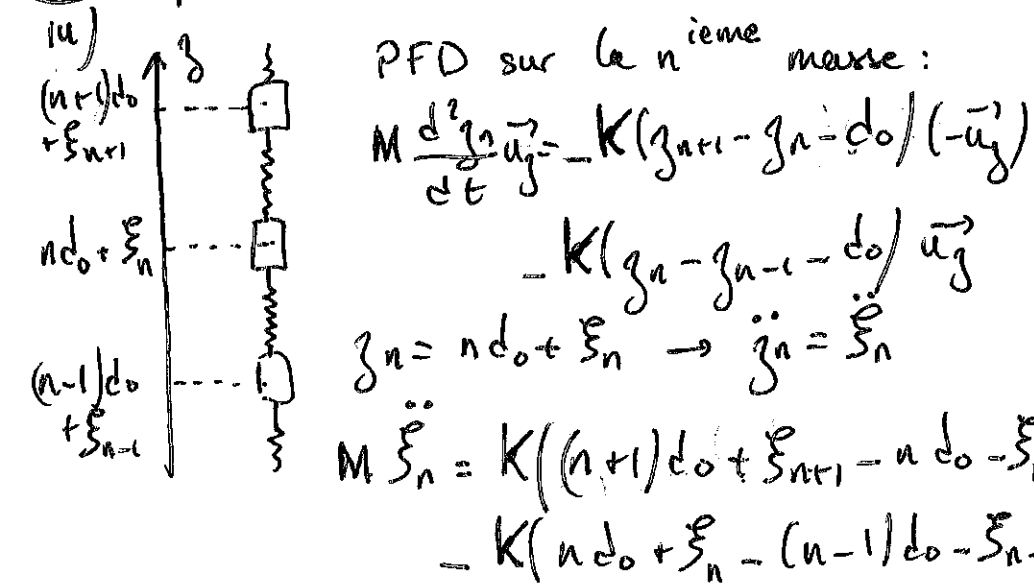
$$\log \tau = \alpha \log a_0 + \beta$$

$$\hookrightarrow \alpha = \frac{\log(\tau)_2 - \log(\tau)_1}{\log(a_0)_2 - \log(a_0)_1} = 1,6$$

$\left| \frac{\alpha - 3/2}{3/2} \right| = 7\%$... de l'ordre de l'approximation de même,
précédemment acceptée.

$$\xi_{n-1}(t) = \xi(z = n d_0, t) - d_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)_{n d_0} + \frac{d_0^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)_{n d_0}$$

III) Modèle ondulatoire du rebond



$$M \ddot{\xi}_n = k(\xi_{n+1} - \xi_n) - k(\xi_n - \xi_{n-1})$$

$$\ddot{\xi}_n + \frac{k}{M}(\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1}) = 0$$

15) $\xi(z = n d_0, t) = \xi_n(t)$

$$\xi_{n+1}(t) = \xi(z = (n+1) d_0, t)$$

$$\xi_{n+1}(t) = \xi(z = n d_0, t) + d_0 \left(\frac{\partial \xi(z, t)}{\partial z} \right)_{n d_0} + \frac{d_0^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)_{n d_0}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} + \frac{k}{m} \left[\cancel{2\xi(z, t)} - \cancel{\xi(z, t)} - \cancel{d_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)} - \cancel{\frac{d_0^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)} - \cancel{\xi(z, t)} + \cancel{d_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)} - \frac{d_0^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{k d_0^2}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{m}{k d_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

On a $c = \sqrt{\frac{k d_0^2}{m}}$

Soit $\vec{F}$ la force exercée par la partie inférieure sur la partie supérieure :

$$\vec{F} = -K(z_n - z_{n-1} - d_0) \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = -K(\xi_n - \xi_{n-1}) \vec{u}_z = -K(\xi(z, t) - \xi(z - d_0, t)) \vec{u}_z$$

(14)
$$\vec{F} = -K \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right) d_0 \vec{u}_z$$

16) $\xi(x, t) = \xi_m \sin(\alpha z - \varphi) \cos(\omega t - \psi)$ ⑥

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\alpha^2 \xi$$

$$-\alpha^2 \xi(z, t) = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \xi(z, t)$$

$$\text{Vraie } \forall(z, t) \Rightarrow \alpha^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\omega}{c}}$$

17) CL $\xi(z=0, t) = 0$ (Sol rigide)

$$0 = \xi_m \sin(-\varphi) \cos(\omega t) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$$

18) Au niveau de la surface supérieure
pas de force exercée au dessus de la chaîne.

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{z=2a_0} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \xi_n \alpha \cos(\alpha z) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{z=2a_0} = \xi_n \alpha \cos(\alpha a_0) \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad \forall t$$

$$\text{Donc } \cos(2\alpha a_0) = 0 \quad \text{ie } 2\alpha a_0 = \frac{(2i+1)\pi}{2} \quad i \in \mathbb{Z}$$

$$d_i = \frac{\omega_i}{c} = \frac{(2i+1)\pi}{4a_0} \Rightarrow \boxed{\omega_i = \frac{(2i+1)\pi c}{4a_0}}$$

19) Pour le mode fondamental, $\omega_0 = \frac{\pi c}{4a_0}$

$$\xi(z, t) = \xi_n \sin\left(2\frac{\omega_0 a_0}{c} z\right) \cos(\omega_0 t)$$

Au moment du décollement, il n'y a plus de force de compression qui s'exerce sous la partie basse de la goutte.

$$\text{Donc } \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad \text{à l'instant } t = \tau$$

$$\xi_n \times \frac{2\omega_0 a_0}{c} \cos\left(\frac{2\omega_0 a_0}{c} \times 0\right) \cos(\omega_0 \tau) = 0$$

$$\omega_0 \tau = n \frac{\pi}{2} \quad \tau \text{ est le premier instant non nul positif possible}$$

$$\text{Donc } n = 1$$

$$\tau = \frac{\pi \times 4a_0}{2\pi c} = \boxed{\frac{2a_0}{c} = \tau}$$

$$20) \frac{1}{K_{tot}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \Rightarrow \boxed{K_{tot} = \frac{k}{2}}$$

21) If γ a N resorts $\rightarrow \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{K} = \frac{N}{K}$

$k = \frac{K}{N} = 12\pi A \Rightarrow \boxed{K = 12\pi AN}$

22) $\tau = \frac{2a_0}{c} = 2a_0 \sqrt{\frac{M}{Kb_0^2}} = \frac{2a_0 N \sqrt{M}}{2a_0 \sqrt{K}}$

$\tau = N \sqrt{\frac{m}{N^2 k}} = \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{\pi a_0^2 \times 2a_0 \mu_e}{12\pi A}}$

$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{\mu_e a_0^3}{6A}}}$ AN: $\tau = \sqrt{\frac{10^3 \times (10^{-3})^3}{6 \times 7 \cdot 10^{-2}}}$

$\tau = 1,6 \text{ ms}$ On retrouve l'odg de la Q13

23) Propagation des ondes sonores dans l'eau

$\left(c_{\text{eau}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_e K_s}} \right) \Rightarrow$ Mesurer c_{eau} avec un émetteur US et un récepteur US.

24) $\tau = \frac{2e}{c_{\text{eau}}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1,4 \cdot 10^3} = 1,43 \cdot 10^{-6} \text{ s} \ll \tau_{\text{modèle précédent}}$

On ne tient pas compte de la compressibilité de l'eau.

IV Étude des pertes lors du rebond

25) Écoulement incompressible $\rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y = 0$ Donc $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$
 $\vec{v} \perp \vec{e}_y \quad | \quad \vec{v} = v(y) \vec{e}_x$

Accélération des particules de fluide:

$\frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \vec{g} \text{ grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

$(\vec{v} \cdot \vec{g} \text{ grad}) \vec{v} = \left[v(y) \vec{e}_x \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \vec{v} \stackrel{=0}{=} \text{Écoulement stationnaire}$

$(\vec{v} \cdot \vec{g} \text{ grad}) \vec{v} = \left[v(y) \vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right] \vec{v} = \vec{0}$

26) $-\vec{g} \text{ grad } p + \eta \Delta \vec{v} \stackrel{=0}{=} \vec{0}$

$\vec{g} \text{ grad } p = \frac{dp}{dy} \vec{e}_y \quad \Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \Delta v_x \vec{e}_x$

$$\Delta \vec{v} = \frac{d^2 v}{dy^2} \vec{e}_x$$

Donc l'éq. de Navier-Stokes donne:

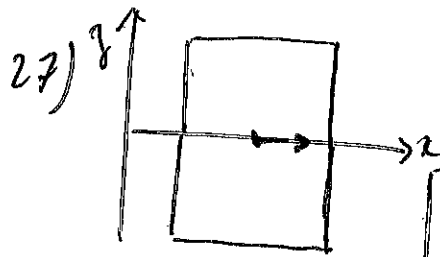
$$-\frac{dp}{dy} \vec{e}_y + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} \vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}_y \quad \frac{dp}{dy} = 0 \rightarrow \boxed{p = \text{cte}} \Leftrightarrow \text{champ de pression uniforme}$$

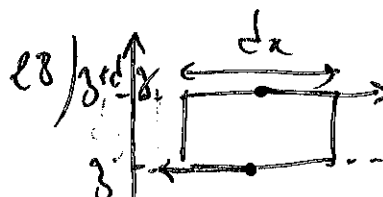
$$\vec{e}_x \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = 0 \Rightarrow v(y) = Ay + B$$

$$v(y=0) = 0 = B \quad v(y=e) = Ae = U$$

$$\boxed{v(y) = \frac{U}{e} y}$$

27) 
$$d\vec{F} = \eta \frac{dv}{dy} dS \vec{e}_x$$

$$\boxed{f_s = \frac{\eta U}{e}}$$

28) 
$$\delta P_{y+dy} = \eta \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y+dy} dS \vec{e}_x - v_{y+dy} \vec{e}_y$$

$$\delta P_{y+dy} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{dv^2}{dy} \right)_{y+dy} dx dy$$

De même en y, $\delta P_y = -\frac{\eta}{2} \left(\frac{dv^2}{dy} \right)_y dx dy$

$$dP_{\text{ext}} = \delta P_{y+dy} + \delta P_y = \frac{\eta}{2} \left[\left(\frac{dv^2}{dy} \right)_{y+dy} - \left(\frac{dv^2}{dy} \right)_y \right] dx dy$$

$$dP_{\text{ext}} = \frac{\eta}{2} \frac{d^2 v^2}{dy^2} dx dy dy = \frac{\eta}{2} \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{U y}{e} \right)^2 dV$$

$$dP_{\text{ext}} = \frac{\eta U^2}{2e^2} \times 2 dy dV = \boxed{\frac{\eta U^2}{e^2} dV = \rho dV = dP_{\text{ext}}}$$

$dP_{\text{ext}} > 0$ c'est grâce aux forces de viscosité qu'il y a mise en mouvement des différentes couches de fluide.

29) Théorème de la Pression cinétique:

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = 0 \quad (v = \text{cte})$$

$$P_{\text{int}} = -P_{\text{ext}} < 0$$

la puissance transmise aux particules de fluide est dissipée sous forme de chaleur.

$$30) \boxed{\frac{1}{e} \frac{de}{dt} \sim \frac{1}{\tau}} \quad \frac{dP}{dV} = \frac{\mu_e}{\tau^2}$$

$$\Delta E \sim \frac{dP}{dV} \times \tau \times 2\pi a_0^3 = \boxed{\frac{2\pi a_0^3 \mu_e}{\tau} = \Delta E}$$

$$31) E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \mu_e 2\pi a_0^3 v_0^2$$

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{\mu_e 2\pi a_0^3 v_0^2 \tau}{2\pi a_0^3 \mu_e} = \boxed{\frac{\mu_e g h \tau}{2 \mu_e} = \frac{E}{\Delta E}}$$

$$\boxed{\frac{E}{\Delta E} = \frac{10^3 \times 1,4 \times 5 \cdot 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} = 5 \cdot 10^3 \gg 1}$$

Tres peu d'énergie est perdue par la goutte lors du rebond.

$$32) Re = \frac{\mu_e v_0 a_0}{\eta_e} = \frac{10^3 \times 1,4 \times 2 \times 10^{-3}}{10^{-3}}$$

Re $\sim 2 \cdot 10^3 \rightarrow$ Difficile de croire à un

régime d'écoulement laminaire ...

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{\mu_e v_0^2 \tau}{2 \mu_e Re} = \frac{5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = 2,5$$

Cette fois-ci E et ΔE sont du même ord et cela peut expliquer le nombre limite de rebond.

⑤ Étude des pertes dans l'air

33) On néglige la traînée (et la poussée d'Archimède)
PFD sur la goutte : (goutte uniquement soumise à son poids)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} \rightarrow v(t) = -gt \rightarrow g(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

au niveau de l'altitude g : $\sqrt{\frac{2(h-g)}{g}} = t$

$$\boxed{v = \sqrt{2g(h-g)}}$$

$$34) Re(g) = \frac{\rho_a \mu_a v}{\eta_a} = \frac{\rho_a \mu_a}{\eta_a} \sqrt{2g(h-g)}$$

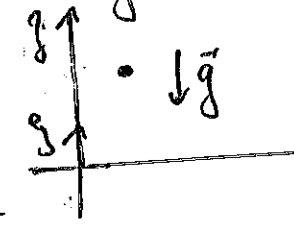
$$Re = \frac{2 \times 10^{-3} \times 1,3}{1,8 \cdot 10^{-5}} \sqrt{2 \times 9,8 \times 10^{-2}} = 64$$

Dès le début de la chute $Re \gg 1$

Donc on ne peut pas modéliser l'écoulement par un écoulement laminaire $\rightarrow$ Traînée quadratique en v plus pertinente qu'une traînée linéaire. (Méthode perturbative)

35) Au niveau du sol: $v = \sqrt{2gh}$

$\vec{F} = \pm \mu_a \pi a_0^2 \times 2gh \vec{e}_y$
 goutte tombe (pointing to $+$)
 goutte rebondit (pointing to $-$)



PFD: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} \pm \mu_a \pi a_0^2 h \vec{g}$
 goutte rebondit (pointing to $+$)
 goutte tombe (pointing to $-$)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} \pm \frac{3\mu_e 4\pi}{4a_0\mu_e 3} a_0^3 \mu_a h \vec{g}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} \pm \frac{3h\mu_a m}{4a_0\mu_e} \vec{g} = m\vec{g}_{\pm}$$

$$\vec{g}_{\pm} = -g_{\pm} \vec{e}_y = g(1 \pm \gamma) \vec{e}_y ; \quad \gamma = \frac{3h}{4a_0\mu_e} \frac{\mu_a}{\mu_e}$$

$$\gamma = \frac{3 \times 10^{-4} \times 43}{4 \times 10^{-3} \times 10^3} = 2,0 \cdot 10^{-1}$$

γ n'est pas négligeable devant 1. Il est donc pertinent de le prendre en compte.

36) Au moment du 1^{er} choc:

$v = \sqrt{2gh}$, elle repart donc vers le haut avec cette même vitesse (pas de dissipation d'énergie durant le choc).

Après le choc,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g + \vec{e}_y \rightarrow \int_{\sqrt{2gh}}^{\vec{v}(t)} dv = \int_0^t -g_{+} dt$$

$$v(t) - \sqrt{2gh} = -g_{+} t \rightarrow g(t) = -\frac{1}{2} g_{+} t^2 + \sqrt{2gh} t$$

Au moment où l'altitude max est atteinte

$$t = \frac{\sqrt{2gh}}{g_{+}} \quad \text{et } g = h_1 \text{ tel que}$$

$$h_1 = -\frac{1}{2} g_{+} \left(\frac{\sqrt{2gh}}{g_{+}} \right)^2 + \sqrt{2gh} \frac{\sqrt{2gh}}{g_{+}}$$

$$h_1 = - \frac{g \cdot h}{g_+} + \frac{2g \cdot h}{g_+} = \frac{g_-}{g_+} h$$

$$h_1 = \frac{1-r}{1+r} h$$

On aura de même $h_2 = \frac{1-r}{1+r} h_1$

↳ Suite géométrique $h_n = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n h$

37/ Comme à la question (10), on considère que les rebonds sont perceptibles tant que la hauteur de rebond est supérieure à 10% de la hauteur initiale i.e. $h_n > 0,1 h$

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^N h > 0,1 h \Leftrightarrow N \ln \left(\frac{1-r}{1+r} \right) > \ln(0,1)$$

$$N \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) < \ln(10)$$

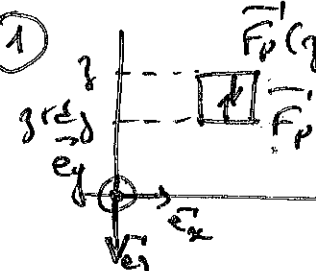
$$N < \frac{\ln 10}{\ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right)} = \frac{\ln 10}{\ln \left(\frac{1 + \frac{3h}{2a_0} \frac{\mu a}{\mu e}}{1 - \frac{3h}{2a_0} \frac{\mu a}{\mu e}} \right)}$$

AN : $N < \frac{\ln 10}{\ln \left(\frac{1 + 2 \cdot 10^{-1}}{1 - 2 \cdot 10^{-1}} \right)} = 5,7$

$N = 5 \rightarrow$ Conforme à ce qui est annoncé en début de sujet.

Problème (I) : Les sous-marins. (3a PC 2023)

I Hydrostatique du sous-marin en plongée

①  Bilan des forces pressantes sur le volume dV .

$$d\vec{F}_p(z) + d\vec{F}_p(z+dz) + d\vec{F}_{lat} = d\vec{F}_p$$

les forces latérales se compensent deux à deux donc $d\vec{F}_p = [F_p(z) - F_p(z+dz)] \vec{e}_z$

$$d\vec{F}_p = - \frac{dF_p}{dz} dz \vec{e}_z = - \frac{dp(z)}{dz} \underbrace{dx dy dz}_{dV} \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{F}_v = - \frac{dp}{dz} \vec{e}_z}$$

② $\vec{p}_v = \rho \vec{g} \Rightarrow$ Equilibre du volume dV dans le ref. terrestre (galiléen)

$$\sum \vec{F}_v = \vec{0} \Rightarrow \boxed{- \frac{dp}{dz} \vec{e}_z + \rho \vec{g} = 0}$$

③ $\int_{p_0}^{p(z)} dp = \int_0^z \rho g dz \Rightarrow \boxed{p(z) = p_0 + \rho g z}$

④ $\boxed{\vec{F} = - \rho_0 \pi R^2 L \vec{g}}$ Cette force est opposée au poids du volume de fluide déplacé.
cela représente la résultant des forces de pression sur la coque du sous-marin.

⑤ les ballasts emprisonnent de l'air qui permet d'augmenter ou de diminuer la masse volumique du sous marin et ainsi permette au système de régler sa profondeur d'équilibre ou de se déplacer verticalement.

$p(z) = 10^5 + 1000 \times 9,8 \times 300 = 30,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
 $\uparrow$
 $\boxed{p(z_c) = 30,4 \text{ bar}}$

$P_{max} = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{100 \times 9,8}{10^{-6}} = 9,8 \cdot 10^8 \text{ Pa} \quad \textcircled{1}$

le sous-marin peut parfaitement résister à la pression exercée par l'eau à la profondeur $z_c = 300 \text{ m}$.

II Quelques aspects de la cavitation.

⑥ fluide incompressible $\Rightarrow$ écoulement incompressible

$$\boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2}$$

$\Leftrightarrow$ Conservation du débit volumique

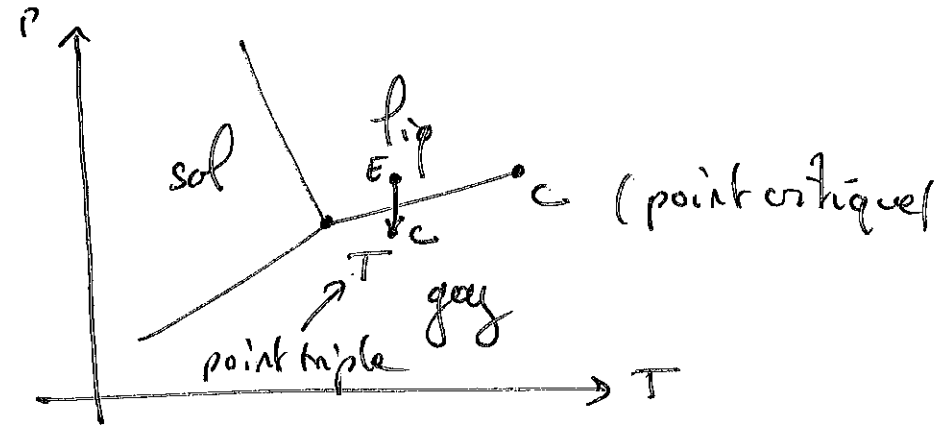
⑦ le th de Bernoulli peut être appliqué sur une ligne de courant si :

- Régime d'écoulement stationnaire
- fluide parfait, incompressible.
- fluide homogène.
- $\vec{g}$ uniforme.

Dans ces conditions, sur la ligne (EC),

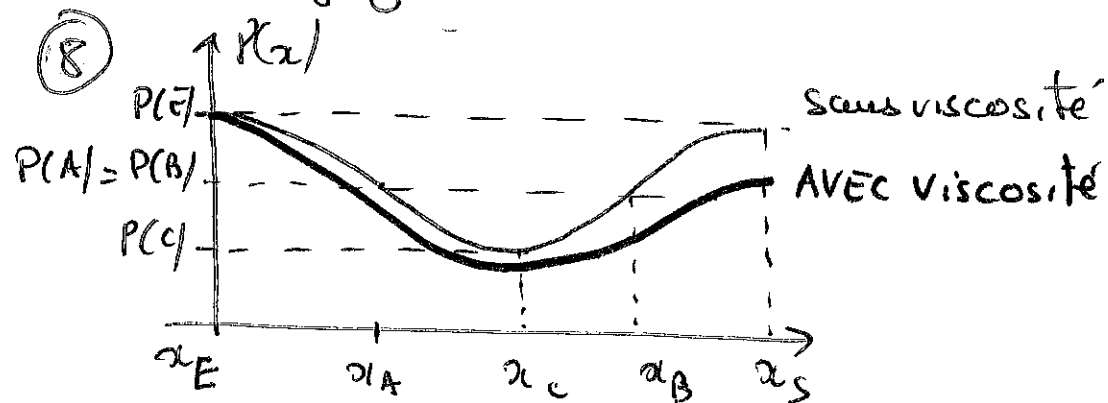
$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2$$

Or $g_1 = g_2 \Rightarrow \boxed{P(C) - P(E) = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \rho}$



le rétrécissement implique une accélération du fluide $\Rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} > v_1$

Donc $P(C) < P(E)$ il est donc possible de passer du domaine de stabilité de l'eau liquide à l'eau gazeuse.



la pression le long de la canalisation
diminue davantage en présence d'effets
 de viscosité = Perte de charge

⑨ Un sous-marin est plus discret s'il y a
 moins de bulles autour des hélices.

La formation de bulles est favorisée en
 haut chauffe $\Rightarrow$ Le sous-marin est plus
discret en eau froide.

les bulles se forment plus facilement
 à basse pression donc en haut de
l'hélice

⑩ Équation locale de conservation de la

masse: $\boxed{\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ avec $\vec{j} = \rho \vec{v}$

Paroi impénétrable: $\boxed{\vec{v}(r=R, t) = \dot{R}(t) \vec{e}_r}$
 (+ écoulement parfait)

$$\text{div } \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

l'eau est incompressible $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$;

homogène $\text{div } \rho \vec{v} = \rho \text{div } \vec{v}$

l'écoulement est incompressible $\Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = 0 \Rightarrow r^2 v = f(t)$$

Or pour $r=R$; $R^2 v(R, t) = f(t) = R^2 \dot{R}$

$$\text{Donc } v(r, t) = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt}$$

$$\text{On pose } \boxed{ACH = -R^2 \frac{dR}{dt} \text{ et } v(r, t) = -\frac{ACH}{r^2}}$$

$$\textcircled{11} \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \vec{e}g - \text{grad } p$$

ou " (on néglige l'effet
 de la pesanteur)

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$\text{grad } p \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial p}{\partial r}$$

On projette la relation d'Euler sur (or) ③

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-A(t)}{r^2} \right) + \left(\frac{\rho_0 A(t)}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-A(t)}{r^2} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho_0}{r^2} \dot{A}(t) - 2 \frac{\rho_0 A(t)^2}{r^5}}$$

$$\textcircled{10} \frac{dR(t)}{dt} = - \sqrt{\frac{2}{3\rho_0} (p_{v,0} - p_{sat}(T))} \left[\left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3 - 1 \right]^{1/2}$$

$$\int_{R_0}^0 \frac{dR(t)}{\left[\left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3 - 1 \right]^{1/2}} = \int_0^{\tau} -\frac{K}{K} dt \quad \text{On pose } u = \frac{R}{R_0}$$

$$du = \frac{dR}{R_0}$$

$$\int_{R_0}^0 \frac{d(R(t))}{\left[\left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3 - 1 \right]^{1/2}} = - \int_0^{R_0} \frac{dR}{\left(\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - 1 \right)^{1/2}} = - R_0 \int_0^1 \frac{du}{\left(\frac{1}{u^3} - 1 \right)^{1/2}}$$

$$= - R_0 \int_0^1 \sqrt{\frac{u^3}{1-u^3}} du = - R \tau$$

$$R_0 \tau = K \tau \Rightarrow \tau = \frac{R_0 \tau}{\sqrt{\frac{2}{3\rho_0} (p_{v,0} - p_{sat}(T))}}$$

$$\text{AN: } \tau = \frac{2.10^{-3} \times 0.747}{\sqrt{\frac{2}{3.10^3} (10^5 - 2.4.10^3)}}$$

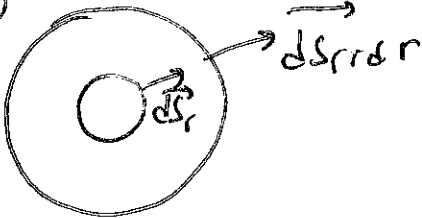
$\tau = 185 \mu s \rightarrow$ Durée de vie très faible comparativement à la durée de vie d'une bulle dans une boisson pétillante.

Problème 2 : Animaux marins

(D'après e3a PC) 2021

I Homéothermie des poissons

① La conductivité thermique, s'exprime en $W K^{-1} m^{-1}$.
 Le poisson pointe vers les régions froides car le phénomène de diffusion thermique tend à homogénéiser la température du milieu par transfert d'énergie des zones chaudes vers les zones froides.

②  Bilan d'énergie dans une tranche comprise entre r et $r+dr$ durant dt .

En RP ; $d^2U = 0$

1^{er} Principe : $d^2U = \int_{S_r} \vec{j}_d(r) \cdot \vec{ds}_r dt - \int_{S_{r+dr}} \vec{j}_d(r+dr) \cdot \vec{ds}_{r+dr} dt$

$$0 = 2\pi r L \left[\vec{j}_d(r) \cdot \vec{e}_r - \vec{j}_d(r+dr) \cdot \vec{e}_r \right] dt$$

DL1 : $\frac{d}{dt} (r j_d(r)) = 0$ loi de Fourier

$$-\frac{d}{dr} (\lambda r \vec{\text{grad}} T) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} \Leftrightarrow \int_{T_1}^{T(r)} dT = \int_{r_1}^r \frac{A}{r} dr$$

$$T(r) = A \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + T_1$$

CL: $T(r_2) = T_2 = A \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + T_1$

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \Rightarrow T(r) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + T_1$$

③ $\varphi = \int \vec{j}_d(r) \cdot \vec{ds} = 2\pi r L \times -\lambda \frac{dT}{dr}$

$$\varphi = -2\pi \lambda L \frac{(T_2 - T_1)}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \times \frac{1}{r}$$

$$\varphi = \frac{2\pi \lambda L (T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

④ $R = \frac{T_1 - T_2}{\varphi} = \frac{1}{2\pi \lambda L} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$

⑤ $E_{\text{produite}} = \varphi \Delta t = \frac{2\pi \lambda L (T_{\text{eq}} - T_0)}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \Delta t$ ⑤

$$E_{th\ perdue} = \frac{2\pi \times 7 \cdot 10^{-2} \times 1,6 \times (36,5 - 2) \times 24 \times 3600}{\ln\left(\frac{25}{20}\right)}$$

$$E_{th\ perdue} = 9,4 \text{ MJ}$$

$$E_{nourriture} = 4,6 \times 4 = 18,4 \text{ MJ}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{th\ perdue}}{E_{nourriture}} = 50\%$$

La moitié de l'énergie apportée par la nourriture sert au maintien de la température corporelle du phoque.

(Rq: $E_{th\ perdue} = 11,5 \text{ MJ}$ avec $\ln\left(\frac{30}{25}\right)$ accepté)

I Echolocation des dauphins

$$\textcircled{7} p(n, t) = p_0 + p_1(n, t) \text{ avec } p_1 \ll p_0$$

$$\rho(n, t) = \rho_0 + \rho_1(n, t) \text{ avec } \rho_1 \ll \rho_0$$

$$v(n, t) \ll c_{son} \quad \textcircled{6} c_{son} = 340 \text{ m/s}$$

Dans l'approximation acoustique, les vibrations correspondent à de faibles variations de pression ou de masse volumique se propageant à une célérité grande devant la vitesse de vibration selon un écoulement parfait.

$$\left[\frac{1}{\text{kg K}_s} \right] = \text{L}^2 \text{T}^{-2}$$

$$\textcircled{8} c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 K_s}} = \frac{1}{\sqrt{1030 \times 4,9 \cdot 10^{-10}}}$$

$c = 1407 \text{ m/s}$ Les ondes sonores se propagent beaucoup plus vite dans l'eau que dans l'air ($c_{son\ air} \approx 340 \text{ m/s}$)

$$\textcircled{9} f \approx 125 \text{ kHz} \Rightarrow \text{Ultrasons.}$$

$$\Delta f = 25 \text{ kHz}$$

$$\boxed{\Delta f \tau_c = 1} \Rightarrow \tau_c = \frac{1}{25 \cdot 10^3} = 40 \mu\text{s}$$

$\delta t \sim 80 \mu\text{s}$ (même ord. que τ_c)
600 clics par seconde $\Delta t_{clic} = 1,7 \text{ ms}$.

$\Delta t_{clic} \gg \delta t$ les clics sont bien séparés.

$$L_c = c \tau_c = 5,6 \text{ cm. Commentaire!}$$

$\textcircled{10}$ Evolution adiabatique vérifiant la loi de Laplace: $p(n) V(n, t)^{\gamma} = \text{cte}$

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV(n, t)}{V(n, t)} = 0$$

$\textcircled{6}$

$$\frac{(p_{ext} + p(\xi)) - p_{ext}}{\rho c^2} = -\gamma \frac{s(x+\xi-z)}{V(1+\frac{sx}{V})}$$

$$p(\xi) = -\frac{\gamma p_{ext} \xi s (1 - \frac{sx}{V})}{V}$$

Or $\frac{s\xi}{V} \propto \frac{sx}{V}$ est d'ordre 2

Donc à l'ordre 1, $p(\xi) = -\gamma \frac{s\xi}{V} p_{ext}$

2^e loi de Newton appliquée à l'élément de fluide;

$$\rho s \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum \vec{F} = -p_{ext} s \vec{e}_x + (p_{ext} + p(\xi)) s \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x \rho s \delta x \ddot{\xi} = p(\xi) s = -\gamma s \xi p_{ext}$$

$$\ddot{\xi} + \frac{\gamma s p_{ext}}{\rho V \delta x} \xi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma s p_{ext}}{\rho V \delta x}} = 2\pi f_0$$

$$\textcircled{11} \quad I(r_0 = 50 \text{ m}) = \frac{I(r=0)}{2} = I(r=0) e^{-\alpha r_0}$$

$$e^{-\alpha r_0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\alpha r_0 = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{r_0} \ln 2$$

$$\alpha = \frac{1}{50} \ln 2 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$$

$$R = \left(\frac{Z_{eau} - Z_{osst}}{Z_{eau} + Z_{osst}} \right)^2 = \left(\frac{1540 - 1480}{1540 + 1480} \right)^2$$

$$R = 3,9 \cdot 10^{-4} \quad (\text{Tres faible coeff de reflexion})$$

$$Q = R (e^{-\alpha r})^2$$

$$Q = 3,9 \cdot 10^{-4} \times \exp[-2 \times 1,4 \cdot 10^{-2} \times 75]$$

$$Q = 4,9 \cdot 10^{-5}$$

$$U = \frac{8 f c}{2 f}$$

$$U = \frac{1 \times 1402}{2 \times 125} = 5,6 \text{ m/s}$$

$$U = 14,6 \text{ km/h}$$

III Migration des baleines

(12) Les lignes de champ sont tangentes au champ $\vec{B}$

Soit $d\vec{l}$ un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ:

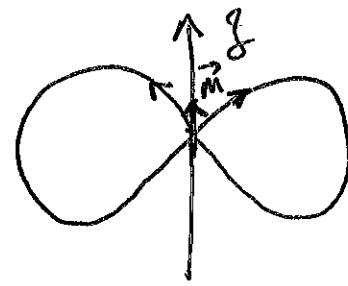
$$d\vec{l} = \delta K \vec{B} = \delta K (l \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\text{Or } d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

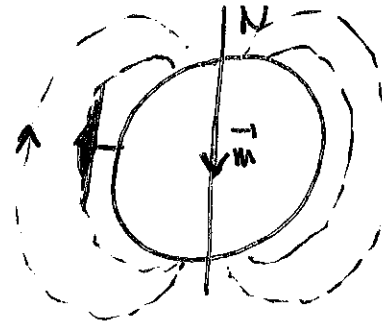
$$\text{Donc } \left. \begin{aligned} dr &= \delta K l \cos \theta \\ r d\theta &= \delta K \sin \theta \end{aligned} \right\} \frac{dr}{r d\theta} = \frac{l \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{l \cos \theta}{\sin \theta} d\theta \Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = l \int_{\sin \theta_0}^{\sin \theta} \frac{d \sin \theta}{\sin \theta}$$

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = l \ln \left| \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right| \Rightarrow \boxed{r = A |\sin^2 \theta|}$$



D'après la figure 10, les lignes de champ ont l'orientation opposée donc le dipôle $\vec{m}$ pointe en fait vers le sud.



La boussole s'aligne avec les lignes de champ qui pointent vers le nord magnétique très proche de nord géographique.

$$(13) \mu = \frac{4\pi B r^3}{l_{\mu 0}} = 7,9 \cdot 10^{22} \text{ A m}^2$$

$$(14) \text{ Vers le Nord: } \left| \frac{\Delta E_p}{E_p} \right| = \left| \frac{\Delta B}{B} \right| = 2\%$$

Soit en moyenne 0,025%/km.

$$\text{Vers le Sud } \left| \frac{\Delta E_p}{E_p} \right| = \left| \frac{\Delta B}{B} \right| = 4\%$$

Soit en moyenne 0,05%/km. C'est trop pour une baleine qui n'a pas fait le cours de magnétostatique. (8)