



Samedi 18 janvier 2025

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

2024-2025

Recommandations :

- Pour choisir l'ordre dans lequel vous traiterez les problèmes lisez le sujet en entier au préalable.
- Les résultats littéraux et numériques doivent être encadrés.
- Un résultat numérique sans unité est considéré faux.
- Les correcteurs (effaceurs, peinture, ruban, stylo à friction) sont interdits.
- La rédaction se fait en langue française respectant syntaxe, grammaire et orthographe.
- Une relecture finale attentive, 15 minutes avant la fin de l'épreuve est indispensable.

Pénalité : Un défaut de qualité de la copie (présentation, écriture, orthographe, syntaxe) pourra faire l'objet d'une pénalité de 1 ou 2 points sur la note finale.

Problème Pour Tous

Réaction à solide consommable : modèle à cœur rétrécissant

Les réactions à solide consommable sont courantes dans les procédés de transformation de la matière. On peut citer la réaction d'oxydation du sulfure de zinc en présence d'air pour former l'oxyde de zinc, un matériau semi-conducteur qui pourrait remplacer le dioxyde de titane dans les cellules photovoltaïques.

La réaction s'écrit : $2 \text{ZnS}_{(s)} + 3 \text{O}_{2(g)} \rightleftharpoons 2 \text{ZnO}_{(s)} + 2 \text{SO}_{2(g)}$

La réaction met en jeu une phase fluide et une phase solide. Une particularité de ce type de réactions est la formation d'un produit solide poreux qui remplace progressivement le réactif initial. Dans le cas de particules sphériques, on observe un déplacement du front de réaction (l'interface entre le réactif solide non consommé et le produit solide) de l'extérieur de la particule vers le centre en fonction du temps (*figure 1*).

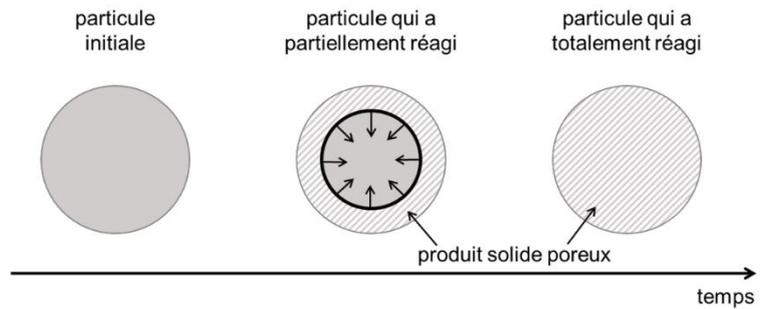


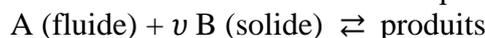
Figure 1 : Représentation schématique de l'évolution du front de réaction en fonction du temps.

Les phénomènes physiques et chimiques mis en jeu lors de la réaction sont :

- le transport du fluide réactif à travers la couche limite externe des particules (généralement par convection),
- le transport du fluide réactif à travers la couche de produit solide poreux par diffusion dans les pores,
- la réaction chimique qui est localisée au niveau du front de réaction,
- le transport du produit fluide (s'il existe) dans les pores, puis à travers la couche limite externe.

Le modèle qui permet de représenter ces phénomènes porte le nom de modèle à cœur rétrécissant. Dans une version simple de ce modèle, on suppose que le produit poreux a une densité similaire à celle du réactif et que par conséquent le volume final de la particule qui a totalement réagi est le même que celui de la particule initiale. Dans le cas général, la consommation des particules est contrôlée par les trois premiers phénomènes cités précédemment. Cependant, dans certains cas limites, il se peut que l'un des trois phénomènes soit beaucoup plus lent que les deux autres et c'est lui qui va imposer la vitesse de consommation des particules. On parle alors de phénomène limitant. Par exemple, si la réaction chimique est très lente par rapport aux phénomènes de transport, ce sera le phénomène limitant ; la vitesse de consommation des particules sera contrôlée par la réaction chimique et on parlera de régime chimique.

Dans la suite, pour généraliser, la réaction entre les particules solides (B) et la phase fluide (A) sera écrite de la manière formelle suivante où ν est le coefficient stœchiométrique devant le solide :



Le but de cette épreuve est de mettre en équation le modèle à cœur rétrécissant permettant de prédire la consommation des particules en fonction du temps.

1 - Étude de la diffusion du fluide dans la couche de produit poreux

Le transport du fluide dans la couche de produit de la réaction a lieu par diffusion dans les pores de ce matériau poreux. La porosité d'un matériau est définie comme le volume des pores divisé par le volume total de matériau poreux. Le volume de matériau poreux inclut le volume de solide (appelé volume structurel) et le volume des pores. La porosité est donc la fraction volumique de vide dans le matériau.

Une étude au laboratoire a permis de déterminer les masses volumiques structurelle (sans la porosité), ρ_s , et apparente (prenant en compte la porosité), ρ_{app} , du produit poreux formé au cours de la réaction.

Les valeurs obtenues sont $\rho_s = 2\,500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\rho_{app} = 1\,250\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Q1. Justifier que $\rho_s > \rho_{app}$.

Donner les valeurs théoriques minimale et maximale de la porosité.

Calculer la porosité, ϵ , du produit à partir des valeurs des masses volumiques structurelle et apparente mesurées au laboratoire.

Pour simplifier, on considère que la particule est un parallélépipède rectangle comme représenté sur le schéma de la **figure 2**. L'épaisseur de la particule est de $2e$ et on suppose que la longueur L et la largeur l sont très grandes devant l'épaisseur. On note S la section latérale correspondant au produit $L \times l$ et on considère que la particule réagit avec le fluide uniquement par les deux faces latérales de surface S comme représenté sur le schéma de la **figure 2**.

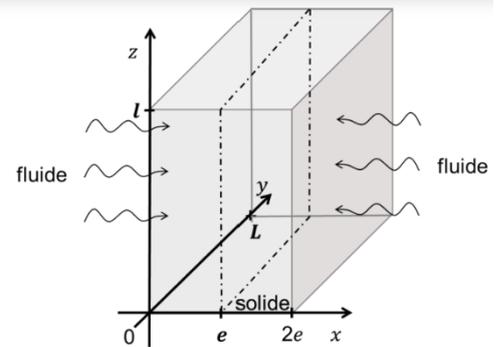


Figure 2 : Schéma de la particule de solide d'épaisseur $2e$

En représentation cartésienne, on note $\vec{j}_N(x, y, z, t)$ le vecteur densité de flux de particules associé aux phénomènes de diffusion que l'on étudie.

Q2. Indiquer les conséquences de l'hypothèse L et $l \gg 2e$ sur la direction du déplacement du front de réaction et sur les invariances du système. Expliquer pourquoi on peut restreindre cette étude à l'intervalle $[0, e]$.

2 - Établissement de l'équation de la diffusion de A dans la couche de produit poreux B

Q3. Rappeler la loi de Fick et sa signification physique.

Préciser le nom et les unités des grandeurs qui la constituent.

On considère un volume élémentaire de la couche de produit poreux de section S et d'épaisseur dx (**figure 3a**). La **figure 3b** est une vue de profil de la figure 3a. La **figure 3c** est également une vue de profil sur laquelle le volume structurel et le volume des pores ont été séparés de manière fictive.

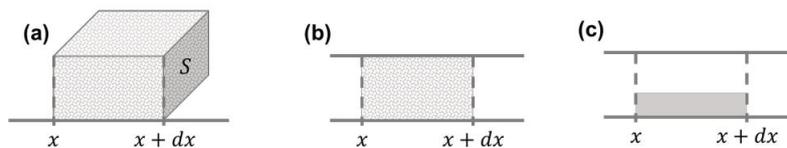


Figure 3 : Volume élémentaire de la couche de produit poreux de section S et d'épaisseur dx

(a) Vue en 3 dimensions ; (b) Vue de profil ; (c) Vue de profil avec séparation fictive du volume structurel et du volume des pores

Q4. Reproduire sur votre copie le schéma du volume élémentaire de la figure 3c en y faisant figurer les flux de matière aux abscisses x et $x+dx$.

Q5. Réaliser un bilan de matière sur ce volume élémentaire traduisant la conservation du nombre de molécules et en déduire l'équation de la diffusion dans la couche de produit poreux :

$$\epsilon \frac{\partial n}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (1)$$

Où D_e est un coefficient de diffusion effectif qui prend en compte le caractère poreux du matériau.

On utilise plus généralement l'équation de la diffusion de A dans la couche de produit poreux en considérant la concentration molaire C plutôt que le nombre de molécules par unité de volume :

$$\epsilon \frac{\partial C}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2)$$

Cette équation s'accompagne des deux conditions aux limites suivantes :

$$\bullet \text{ en } x = 0, D_e \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k_D(C_e - C_s) \quad (3)$$

$$\bullet \text{ en } x = x_f, D_e \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=x_f} = -k_C C_f \quad (4)$$

Avec

- k_D la conductance de transfert du fluide dans la couche limite (en $m \cdot s^{-1}$) ;
- C_e la concentration molaire du fluide dans la phase gazeuse en dehors de la couche limite du fluide
- C_s la concentration en surface de la particule, en $x = 0$ (donc $C_s = C(x=0)$) ;
- C_f la concentration au niveau du front de réaction, en $x = x_f$ (donc $C_f = C(x = x_f)$) ;
- k_C la constante cinétique de la réaction de consommation du solide B par le fluide A (en $m \cdot s^{-1}$) (**figure 4**).

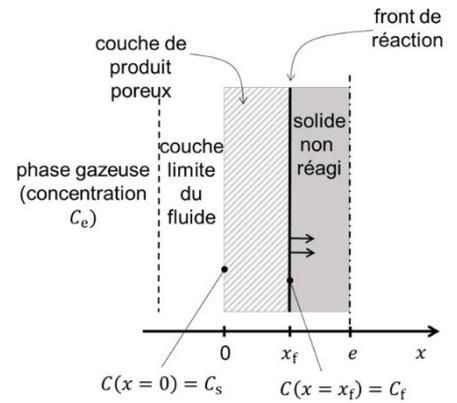


Figure 4 : Schéma de la particule de solide (sur l'intervalle $[0, e]$) partiellement consommée avec la représentation de la couche limite du fluide et du front réaction.

Q6. Vérifier à l'aide d'une analyse dimensionnelle que les conditions aux limites (équations (3) et (4)) sont bien homogènes.

Expliquer comment les deux conditions aux limites ont été obtenues (on pourra faire une analogie avec la loi des transferts thermiques de Newton :

$$\vec{j}_{th} = h(T_s - T_f)\vec{n}$$

Avec \vec{j}_{th} la densité de courant thermique reçu par un fluide en mouvement à la température T_f au voisinage d'un solide de température de surface T_s et h le coefficient de transfert thermique).

3 - Modèle simplifié : hypothèse du régime stationnaire pour la phase fluide

Pour simplifier la résolution de l'équation aux dérivées partielles (équation (2)), nous supposons que la phase fluide évolue en régime stationnaire.

Q7. Simplifier l'équation (2) de la diffusion de A dans le cas du régime stationnaire pour la phase fluide. Montrer que $F_A = -D_e \frac{\partial C}{\partial x} S$, où F_A est le flux molaire de A, c'est-à-dire le flux du vecteur densité de flux de particules molaire à travers une section S de particule solide.

Indiquer le signe de $\frac{\partial C}{\partial x}$ et comment varie F_A dans la couche de produit poreux.

Q8. On rappelle que $C_s = C(x = 0)$ et on note C_x la concentration du fluide A pour une abscisse x comprise dans l'intervalle $[0, x_f]$.

Démontrer l'expression suivante de F_A en s'appuyant sur la **question Q7** et en précisant les différentes étapes de la démonstration :

$$F_A = \frac{D_e S}{x} (C_s - C_x) \quad (5)$$

L'hypothèse du régime stationnaire pour la phase fluide entraîne l'égalité des trois flux molaires de A : celui qui traverse la couche limite externe, celui qui diffuse dans la couche de produit poreux et celui consommé par la réaction.

L'égalité des flux molaires de A conduit à l'expression suivante :

$$F_A = k_D S (C_e - C_s) = \frac{D_e S}{x} (C_s - C_x) = k_S C_x \quad (6)$$

dans le cas particulier où x est la position du front de réaction.

Cette situation est formellement analogue à un montage électrique constitué de 3 résistances placées en série traversées par un même courant. La **figure 5** représente cette analogie.

Dans notre cas, ces trois résistances en série sont dans l'ordre :

- la résistance au transfert externe (notée R_{te}) dans la couche limite externe ;
- la résistance au transfert interne (notée R_{ti}) par la diffusion dans la porosité ;
- la résistance par la réaction chimique (notée R_{rc}) localisée au niveau du front de réaction.

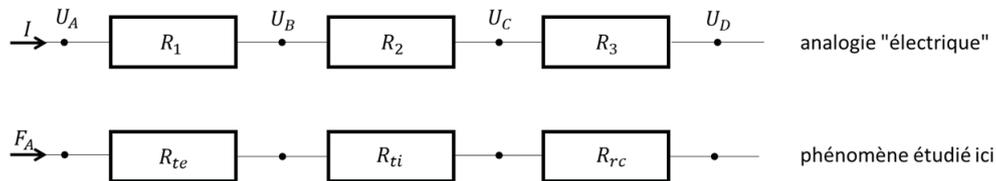


Figure 5 : Représentation schématique du problème en termes de résistance en série

Q9. Indiquer quel type de grandeur du problème étudié correspond aux potentiels U_A , U_B , U_C et U_D de la figure 5.

Transformer l'équation (6) pour faire apparaître ces résistances en se basant sur l'analogie "électrique".

Montrer que l'on peut écrire $F_A = \frac{C_e}{R_{\text{éq}}}$, où $R_{\text{éq}}$ est une résistance équivalente dont l'expression est à préciser en fonction des paramètres D_e , k , k_D , x et S .

On note N_B la quantité de matière du solide B. L'évolution de N_B en fonction du temps est régie par l'équation différentielle suivante :

$$F_A = -\frac{1}{\nu} \frac{dN_B}{dt} \quad (7)$$

Où ν est le coefficient stœchiométrique défini dans la présentation.

Q10. Expliquer comment a été obtenue l'équation différentielle précédente (équation (7)).

Indiquer comment N_B évolue en fonction du temps.

Q11. Soit $N_B(x)$ la quantité de matière de B comprise entre les abscisses x et e .

Pour tout x compris entre x_f et e , exprimer $N_B(x)$ en fonction de ρ_B , M_B , S , x et de e , avec ρ_B la masse volumique de B et M_B sa masse molaire.

Mettre l'équation (7) sous la forme $F_A = Q \frac{\partial x}{\partial t}$ avec Q une constante qui dépend de ν , ρ_B , M_B et de S et dont l'expression est à préciser.

La combinaison de l'expression de F_A obtenue à la Q9 et de celle obtenue à la question précédente permet d'obtenir l'équation à variables séparées suivante :

$$dt = K \left(\frac{1}{k_D} + \frac{x}{D_e} + \frac{1}{k} \right) dx, \quad K = \frac{\rho_B}{\nu C_e M_B} \quad (8)$$

Q12. Montrer que l'intégration de l'équation (8) entre la date $t = 0$ (pour laquelle le front de réaction est en $x = 0$) et la date courante $t = t_f$ (front de réaction en x_f) permet d'obtenir la relation :

$$t_f = t_{0e} \frac{x_f}{e} + t_{0i} \left(\frac{x_f}{e} \right)^2 + t_{0c} \frac{x_f}{e}$$

avec :

- $t_{0e} = K \frac{e}{k_D}$, le temps caractéristique de transport dans la couche limite externe ;
- $t_{0i} = K \frac{1}{D_e} \frac{e^2}{2}$, le temps caractéristique de transport interne par diffusion dans la porosité ;
- $t_{0c} = K \frac{e}{k_C}$, le temps caractéristique de consommation par la réaction chimique.

On introduit le taux de conversion de B, X_B , défini par le rapport entre la quantité de B consommée et la quantité initiale de B, notée N_{B0} .

Q13. Rappeler la relation entre X_B , N_{B0} et N_B , la quantité de B restante.

Q14. Donner la relation entre X_B et x_f , puis exprimer t_f en fonction des trois temps caractéristiques et de X_B .

Q15. Donner la relation entre le temps total de consommation des particules, t_0 , et les trois temps caractéristiques.

Q16. Une expérience en laboratoire sur des particules d'épaisseur $2e$ a conduit aux valeurs suivantes :

$$t_{0e} = 60 \text{ s}, \quad t_{0i} = 300 \text{ s} \text{ et } t_{0c} = 120 \text{ s}.$$

Calculer le facteur par lequel est multiplié le temps total de consommation des particules si l'épaisseur des particules est multipliée par un facteur 2.

L'analyse des valeurs des trois temps caractéristiques permet de mettre en évidence le poids de chaque phénomène dans la résistance au transfert de matière. Dans certains cas extrêmes, l'un de ces trois phénomènes peut prendre le dessus sur les autres. On va alors parler de régime limitant. Dans le cas de cette étude, le régime limitant peut donc être le transport externe, la diffusion dans le produit poreux ou la réaction chimique. D'un point de vue pratique, on considère qu'un régime est limitant lorsque le temps caractéristique associé est supérieur d'un ordre de grandeur aux temps caractéristiques associés aux deux autres phénomènes (par exemple, si le transport de matière externe était le phénomène limitant, on aurait $t_{0e} \gg t_{0i}$ et $t_{0e} \gg t_{0c}$).

Q17. Donner les conditions sur k_D , k_C et D_e dans le cas où le régime limitant est le régime de diffusion interne.

Thermique dans un réacteur à eau pressurisée

Les réacteurs nucléaires à eau pressurisée (REP) exploitent l'énergie libérée par la fission de noyaux d'uranium 235 provoquée par des flux de neutrons pour chauffer l'eau d'un premier circuit appelé primaire. Ce dernier va transférer son énergie thermique, via un échangeur appelé générateur de vapeur, à une deuxième circuit appelé circuit secondaire. L'eau du circuit secondaire subit un cycle qui permet la production d'énergie électrique via la mise en rotation d'une turbine reliée à un alternateur.

Ce problème a pour objectif d'étudier es aspects thermiques du combustible nucléaire, siège des réactions de fission. Le combustible nucléaire est confiné dans des gaines métalliques cylindriques formant ainsi ce qu'on appelle des « crayons combustibles ». Ces derniers sont regroupés en une structure d'allure cylindrique. Cet ensemble de crayons combustibles est appelé « cœur » du réacteur.

A – Position du problème

Afin d'évaluer les performances thermiques d'un réacteur nucléaires, différentes grandeurs sont utilisées, en voici leur définition :

- La puissance produite par les réactions de fission au sein du combustible est appelée puissance thermique, notée P_{th} .
- La puissance thermique volumique φ_v est la puissance thermique produite par unité de volume de combustible.
- La puissance thermique surfacique φ_s est la puissance thermique échangée par unité de surface.
- La puissance électrique P_e de la centrale est reliée à la puissance thermique à travers le rendement global de la centrale.

Nous allons étudier un REP d'une puissance électrique $P_e = 1450 \text{ MW}$ dont le rendement global $\eta = \frac{P_e}{P_{th}} = 34\%$. Il possède $N = 54120$ crayons combustibles de hauteur $H = 4,3 \text{ m}$ (dont un est schématisé sur la figure 1). On donne le rayon extérieur de la gaine $r_g = 4,5 \text{ mm}$, le rayon du combustible $r_c = 4,0 \text{ mm}$ et l'épaisseur de la gaine $e = 0,5 \text{ mm}$.

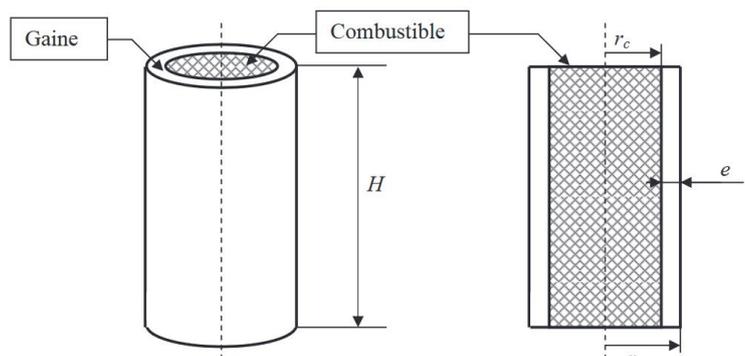


Figure 1 : Description d'un crayon combustible

- 1 – Donner l'expression littérale de la puissance thermique volumique moyenne $\overline{\varphi_v}$ produite par le combustible d'un crayon combustible. Exprimer le résultat en W.cm^{-3} .
- 2 – Donner, pour un crayon, l'expression littérale de la puissance thermique surfacique $\overline{\varphi_s}$ en périphérie du combustible (on négligera les échanges thermiques par les extrémités du crayon). Exprimer le résultat en W.cm^{-2} .
- 3 – La fission d'un noyau d'uranium 235 génère environ une énergie $E_f = 200 \text{ MeV}$. Déterminer le nombre de fission N_f réalisées si ce réacteur fonctionne à 100% de puissance pendant un an. On donne $1 \text{ MeV} = 1,6.10^{-13} \text{ J}$.

B – Equation de la chaleur pour un système à symétrie cylindrique

On considère un corps solide homogène de masse volumique ρ , de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c , dont la température ne dépend que du rayon r (coordonnées cylindriques) et du temps. Nous supposons que ρ , λ et c sont indépendantes de la température. Ce corps est le siège de réaction de fission nucléaire dégageant une puissance volumique φ_v supposée uniforme dans le milieu. On étudie dans ce milieu solide un volume dV cylindrique d'axe Oz et compris entre les rayons r et $r + dr$.

- 4 – Donner la relation entre la variation d'énergie interne dU et la variation de température dT de ce système.
- 5 – Effectuer le bilan thermique de ce système entre t et $t + dt$ faisant intervenir les puissances surfaciques $\varphi_s(r)$ et $\varphi_s(r+dr)$, et la puissance volumique φ_v .
- 6 – Par application de la loi de Fourier que l'on aura soin de rappeler, établir l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \varphi_v$$

C – Profil radial de température

7 – Etablir en régime stationnaire, le profil de température $T(r)$ dans un crayon combustible en notant $T_0 = T(r=0)$ et $T_c = T(r=r_c)$.

En déduire l'expression de l'écart de température $\Delta T_{comb} = T_0 - T_c$ entre le centre et la périphérie du combustible.

8 – De même, établir le profil de température dans la gaine $T(r)$ en fonction de la température de la paroi interne de la gaine $T(r = r_c^+) = T_g$ et de la température de la paroi externe de la gaine $T(r=r_g) = T_p$.

On souhaite calculer maintenant l'écart de température $\Delta T_{gaine} = T_g - T_p$ entre la périphérie du combustible et la périphérie de la gaine.

9 – Exprimer le flux surfacique dans la gaine $\varphi_s(r)$ en fonction de φ_v , r et r_c .

10 – Déduire des résultats précédents $\Delta T_{gaine} = T_g - T_p$ en fonction de φ_v . Effectuer l'application numérique. On donne $\varphi_v = 365 \text{ W.cm}^{-3}$, $\lambda_g = 12,3 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

11 – Il existe un contact thermique imparfait entre le combustible et la gaine. Aussi, la température en périphérie du combustible T_c n'est pas celle de la paroi interne de la gaine T_g . Ce phénomène se modélise par l'introduction d'une résistance thermique de contact notée $R_{th} = 1 \text{ K.W.cm}^2$, tel que $T_c - T_g = R_{th} \cdot \varphi_s(r=r_c)$.

Exprimer $\Delta T_{contact} = T_c - T_g$ en fonction de φ_v . Effectuer l'application numérique.

12 – De la même façon, le transfert thermique entre la paroi extérieure de la gaine et le fluide caloporteur (le fluide du circuit primaire) impose un écart température. Ce dernier est donné par la loi de Newton :

$$\varphi_s(r = r_g) = \alpha(T_p - T_f)$$

où T_f et T_p sont respectivement les températures du fluide primaire et de la paroi externe de la gaine. α , le coefficient de convection est positif et uniforme.

Exprimer $\Delta T_{conv} = T_p - T_f$ en fonction de la puissance volumique φ_v , de α , r_c et r_g .

Calculer $\Delta T_{conv} = T_p - T_f$ sachant que $\alpha = 3,25 \text{ W.cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

13 – Montrer enfin que l'écart de température $\Delta T_{crayon} = T_0 - T_f$ entre le centre du combustible et le fluide primaire peut s'écrire sous la forme $\Delta T_{crayon} = A \cdot \varphi_v$ où A est une constante que vous préciserez.

Calculer ΔT_{crayon} . On donne $\lambda_c = 3,65 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,

D – Profil axial de température d'un crayon

Le nombre de fission dans le combustible n'est en fait pas uniforme. Ainsi, la puissance volumique dépend de la cote z et on modélise cette dépendance par la relation $\varphi_v(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \overline{\varphi_v} \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$ où $\overline{\varphi_v}$ est la puissance volumique moyenne de 365 W.cm^{-3} . En conséquence, la température T_0 n'est pas uniforme mais dépend de la cote z .

Nous allons considérer une section de passage de fluide primaire (caloporteur) qui passe entre quatre crayons combustibles comme indiqué sur les figures 3 et 4. Le fluide primaire arrive à la cote $z = -\frac{H}{2}$ à la température $T_f\left(z = -\frac{H}{2}\right) = T_{fe}$ (température entrée cœur). A la cote $z = +\frac{H}{2}$ il est à la température $T_f\left(z = +\frac{H}{2}\right) = T_{fs}$ (température sortie cœur). Nous considérerons que la masse volumique ρ du fluide primaire est constante, $\rho = 730 \text{ kg.m}^{-3}$.

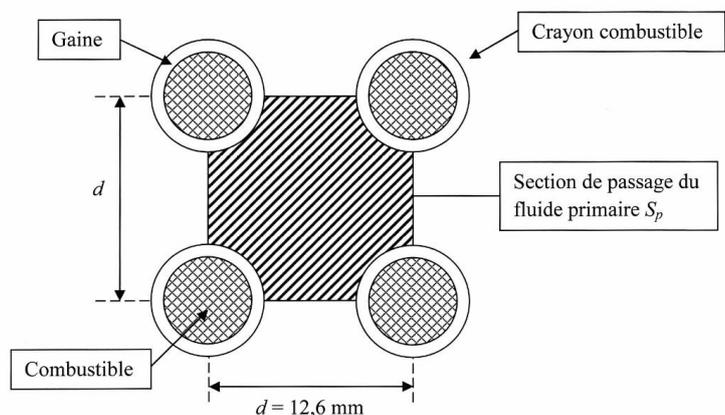


Figure 3 : Section de passage du fluide primaire

14 – Exprimer en régime stationnaire, la puissance reçue par le fluide par unité de longueur $\varphi_L(z)$ en fonction de $\varphi_v(z)$.

L'échange thermique entre les crayons et le fluide primaire se fait à pression constante.

15 – Appliquer au fluide traversant la section de passage de hauteur dz et de section S_p entre les crayons (voir figure 4) pendant dt le premier principe en système ouvert reliant la variation d'enthalpie massique du fluide dh et le transfert thermique reçu par le fluide δQ . On exprimera chacun de ces termes pour obtenir une relation entre $\varphi_L(z)$, c_p capacité thermique massique du fluide caloporteur et dT_f la variation de température du fluide lors de la traversée.

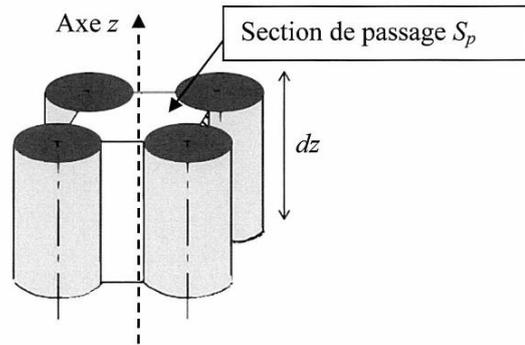


Figure 4 : Vue axiale de la section de passage du fluide primaire

On donne l'expression du débit massique du fluide caloporteur en fonction de sa vitesse d'écoulement v : $D_m = \rho.S_p.v$.

16 – Dédire de ce qui précède une équation différentielle vérifiée par $T_f(z)$ et la résoudre pour trouver un solution de la forme

$$T_f(z) = B + C \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

où on exprimera les constante B et C en fonction de $\overline{\varphi_v}$, H , r_c , c_p , D_m et T_{fe} .

17 – En déduire l'expression de la température $T_0(z)$ au centre du combustible pour une cote z donnée. Puis, déterminer la cote z_{max} où cette température est maximale ainsi que sa valeur $T_0(z=z_{max})$. On prendre $D_m = 0,30 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $c_p = 5,5 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, et $T_{fe} = 290 \text{ }^\circ\text{C}$.

Autour d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au cœur du réacteur. La chaleur générée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute température par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du cœur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à $p = 155 \text{ bar}$, puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur.

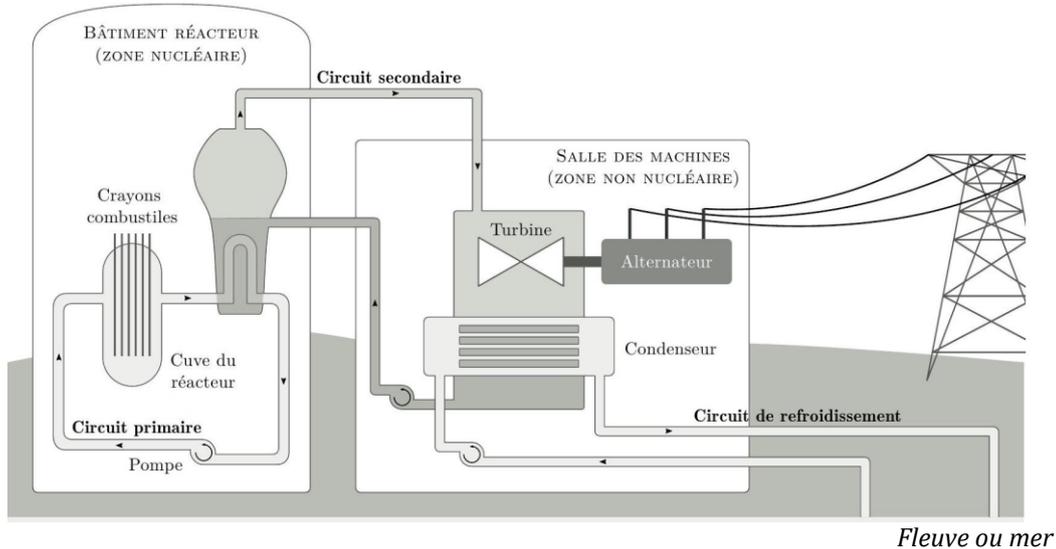


Figure 1 : Principe d'un réacteur nucléaire. Librement adapté d'une illustration EDF.

Un formulaire et certaines données numériques sont disponibles en fin d'énoncé.

Étude du circuit primaire

Le cœur est constitué de $N = 41448$ crayons combustibles. Chaque crayon combustible est constitué d'un cylindre de hauteur $H = 3,66 \text{ m}$ et de diamètre $d = 2R_4 = 9,5 \text{ mm}$. Ces crayons sont le siège de réactions de fission, exothermiques.

La puissance thermique développée dans le cœur vaut : $P_1 = 2776 \text{ MW}$.

Le circuit primaire doit être correctement dimensionné pour prévenir tout échauffement anormal du combustible, $\text{UO}_{2(s)}$, dont la température de fusion vaut $2800 \text{ }^\circ\text{C}$.

La conductivité thermique de $\text{UO}_{2(s)}$ vaut $\lambda_2 = 3,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

La pression de vapeur saturante de l'eau à $345 \text{ }^\circ\text{C}$ vaut 155 bar .

Dans cette partie, on se place en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergie mécanique.

A - Évolution de la température entre le cœur du combustible et le fluide caloporteur

On étudie l'évolution de la température entre le centre du combustible $\text{UO}_{2(s)}$ et l'eau du circuit primaire, qui circule dans l'espace annulaire de rayon allant de R_4 à R_5 et entourant les crayons. On suppose que la température du fluide caloporteur est une constante et vaut $T_5 = 303 \text{ }^\circ\text{C}$.

On note T_2 et T_3 les températures de part et d'autre de l'interface entre le combustible et la gaine. On note T_4 et T_5 les températures de part et d'autre de l'interface entre la gaine et le fluide caloporteur.

Pour simplifier, on néglige les effets de bord à chaque extrémité des cylindres ; on considère pour l'étude que les N crayons combustibles de hauteur H sont disposés les uns au-dessus des autres et que les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale.

Les échanges thermiques au niveau d'une interface sont modélisés selon la relation de Newton : la puissance thermique traversant une surface dS de cette interface s'écrit $h(T_s - T_a)dS$

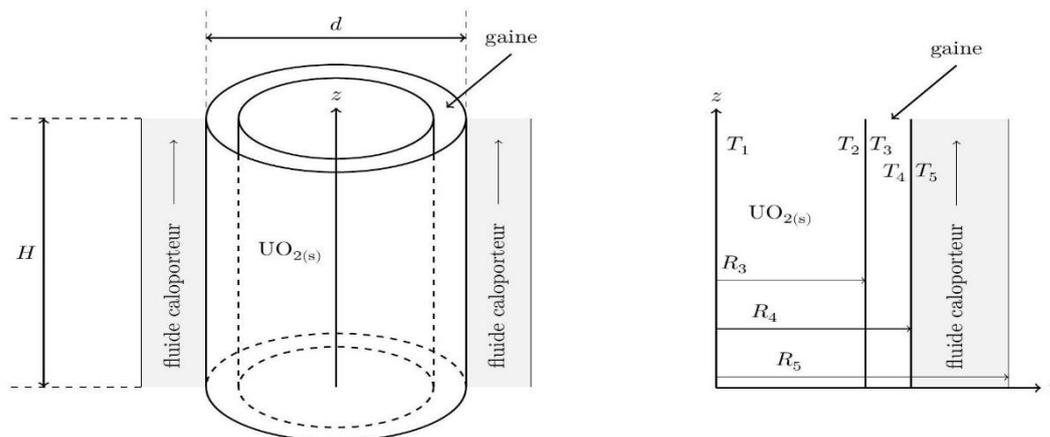


Figure 2

où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et T_s et T_a désignent les températures de part et d'autre de l'interface.

Le coefficient de transfert conducto-convectif entre le combustible et la gaine vaut $h_2 = 10 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
 Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la gaine et le fluide caloporteur vaut $h_4 = 25 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Chaque crayon est entouré d'une gaine d'épaisseur $e = R_4 - R_3 = 0,60 \text{ mm}$ dont la conductivité thermique vaut $\lambda_3 = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Q 1. Exprimer la surface latérale totale, notée S_{tot} , de l'ensemble des N crayons combustibles entourés de la gaine en fonction de N , d et H . *Application numérique.*

On note P_V la puissance thermique par unité de volume engendrée par les réactions de fission au coeur des crayons combustibles et que l'on suppose uniforme. On appelle r la distance à l'axe du cylindre modélisant l'ensemble des N crayons.

Q 2. Montrer que l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible s'écrit

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0$$

Exprimer A en fonction de P_V et λ_2 .

Q 3. Exprimer la température $T(r)$ dans $\text{UO}_{2(s)}$ en fonction de P_V , T_2 , R_3 , λ_2 et r .

Q 4. Exprimer la température T_3 en fonction de T_2 , P_1 , h_2 , d , e , H et N .

Q 5. Exprimer la température $T(r)$ en un point de la gaine en fonction de T_4 , P_1 , R_4 , λ_3 , S_{tot} et r .

Q 6. Calculer les températures T_4 , T_3 , T_2 et T_1 .

Q 7. Représenter le profil température $T(r)$ pour $0 \leq r \leq R_5$.

Q 8. Expliquer pourquoi le bon fonctionnement du pressuriseur du circuit primaire fait partie des critères majeurs de sûreté. Proposer une solution pour pouvoir évacuer une puissance plus importante.

I.B – Prise en compte de dépendances longitudinales pour la puissance thermique volumique et la température

Dans cette partie, on néglige l'influence de la gaine mais on tient compte du profil non uniforme, selon la coordonnée z , de la puissance thermique générée par les réactions de fission, ainsi que de la dépendance avec z du champ de température.

Chaque crayon combustible de rayon R_4 et de hauteur H est refroidi par une circulation d'eau liquide dans un espace annulaire de rayon extérieur R_5 entourant le crayon. On ne considère dans cette sous-partie qu'un seul crayon.

La puissance thermique $P_V(z)$ par unité de volume engendrée par les réactions de fission au sein de la barre du combustible est modélisée par : $P_V(z) = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$. On suppose que les échanges thermiques se font toujours exclusivement dans la direction radiale de la barre de combustible. On appelle r la distance à l'axe du cylindre.

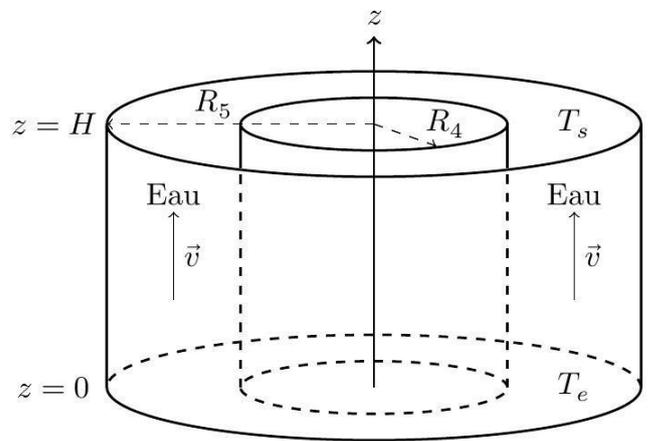


Figure 3

L'eau liquide circule à la vitesse $v = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ avec un débit massique $D_m = 0,30 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; la température d'entrée (en $z = 0$) de l'eau liquide est $T_e = 284^\circ\text{C}$ et sa température de sortie (en $z = H$) est $T_s = 322^\circ\text{C}$. La capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée constante sur cette plage de température, est prise égale à $c_5 = 5750 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. On admet qu'il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur pour $r = R_5$.

Dans la suite, on suppose que la température de l'eau liquide ne dépend que de z et on la note $T(z)$; la température dans la barre de combustible dépend de r et z et est notée $T_c(r, z)$.

Q 9. En réalisant un bilan thermodynamique pendant dt pour l'eau liquide entre les cotes z et $z + dz$ (avec $dz \ll z$), en écoulement stationnaire dans l'espace annulaire, justifier que :

$$D_m c_5 [T(z + dz) - T(z)] = P_V(z) \pi R_4^2 dz$$

Q 10. Exprimer $T_s - T_e$ en fonction de R_4, H, D_m, c_5 et P_0 . Exprimer la température $T(z)$ de l'eau liquide en fonction de T_e, T_s, z et H .

On note h_{cc} le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de combustible et l'eau liquide dans ce modèle, et $T_p(z)$ la température de la paroi de la barre de combustible à l'altitude z .

Q 11. Montrer que :

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

Exprimer B et C en fonction de h_{cc}, H, D_m, c_5 et R_4 .

Q 12. Déterminer la température $T_c(r, z)$ dans la barre de combustible. Montrer que :

$$\frac{T_c(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + D \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \left[E + F \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

Exprimer D, E et F en fonction de $D_m, c_5, H, h_{cc}, \lambda_2$ et R_4 .

Q 13. Exprimer la température $T_c(r = 0, z)$ sur l'axe de la barre de combustible à l'altitude z en fonction de $T_e, T_s, D_m, z, H, c_5, h_{cc}, \lambda_2$ et R_4 .

Q 14. En déduire l'altitude pour laquelle la température sur l'axe de la barre de combustible est maximale. Calculer la valeur de la température maximale sur l'axe; on prendra $h_{cc} = 33 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Préciser si un critère de sûreté en température est respecté.

Le graphe de la figure 4 représente l'évolution de la température de la paroi du crayon combustible avec la cote z .

Q 15. Justifier qualitativement son allure.

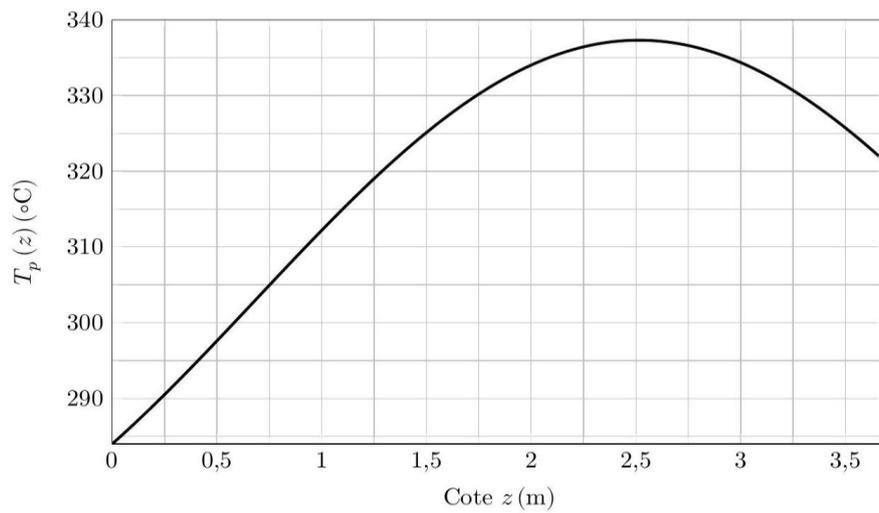


Figure 4 Évolution spatiale de la température T_p de la paroi du crayon combustible.

Formulaire et données

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Coordonnées du point critique de l'eau : $T_c = 374^\circ\text{C}$, $p_c = 221 \text{ bar}$.