

RÉACTION À SOLIDE CONSOMMABLE Modèle à cœur rétrécissant

(CCINP-e3a-PL-2022)

Q1 - * Un pore étant une absence de matériau, un volume V de matériau poreux est donc moins massif que le même volume de matériau exempt de pores. $\rho_s > \rho_{app}$.

* $0 \leq \epsilon \leq 1$

* $\epsilon = \frac{\text{volume pores}}{\text{volume total}} ; \rho_{app} = \frac{m}{V_s + V_p}$ où V_s : volume structural
 V_p : " des pores

$\rho_s = \frac{m}{V_s}$

$\Rightarrow \frac{\rho_{app}}{\rho_s} = \frac{V_s}{V_p + V_s} = \frac{V_s + V_p - V_p}{V_p + V_s} = 1 - \frac{V_p}{V_p + V_s} = 1 - \epsilon.$

d'où $\epsilon = 1 - \frac{\rho_{app}}{\rho_s}$ A.N: $\epsilon = 0,5$

Q2 - * L et $l \gg 2e \Rightarrow$ Invariantes par translations quelconques selon (Oy) et (Oz) d'où $\vec{J}_N = \vec{J}_N(x, t)$.

* Ces relations d'ordre reviennent à négliger les effets de bords dont le front de réaction se déplace selon (Ox) .

$\vec{J}_N = J_N \vec{e}_x.$

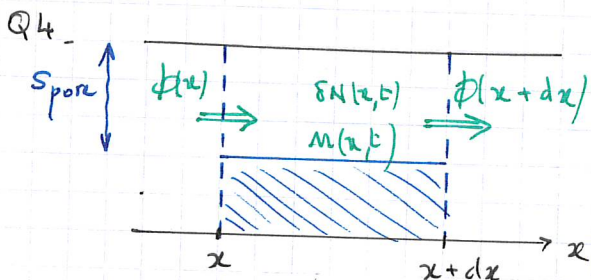
* Le système est symétrique par rapport au plan $x=e$. On peut donc limiter l'étude à la zone $x \in [0, e]$.

Q3 - loi de Fick: $\vec{J}_N = -D \text{grad } n$ Elle traduit que la densité de flux de particules se fait de la région la plus concentrée vers la zone la moins concentrée. (signe (-)).

$\vec{J}_N$: densité de courant de particules en $m^{-2}.s^{-1}$

D : coefficient de diffusion: en $m^2.s^{-1}$

n : densité particulaire: en m^{-3} .



Q5 - Posons $\delta N(x, t)$: le nombre de particules dans le pore.

$\delta N(x, t) = n(x, t) S_p dx$

$\delta N(x, t+dt) - \delta N(x, t) = \frac{\partial n}{\partial t} S_p dx dt$

Or $S_p dx = \epsilon S dx$

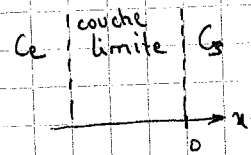
Bilan de matière: $d(\delta N) = [\phi(x) - \phi(x+dx)] dt = [\vec{J}_N(x, t) - \vec{J}_N(x+dx, t)] \vec{e}_x \cdot S dt$

$\rightarrow d(\delta N) = - \frac{\partial J_N}{\partial x} S dx dt = - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} S dx dt$ par la loi de Fick.

où $\varepsilon \frac{\partial m}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}$

Q6 - * $[D_e \frac{\partial C}{\partial x}] = LT^{-1}[C]$ et $[k_d(C_e - C_s)] = LT^{-1}[C]$ d'après l'unité de k_d

donc la condition limite (3) est homogène de même pour la condition limite (4).

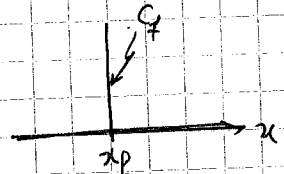


* $D_e \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = -J_{N,x}(x=0)$ d'après la loi de Fick.

Par analogie avec la loi de Newton, la densité de courant de diffusion à travers la couche limite est proportionnelle à l'écart de concentration de part et d'autre de cette couche limite. L'égalité entre ces densités de courant est donnée par la continuité de la densité de flux de particules.

* $D_e \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=x_f} = -J_{N,x}(x=x_f)$

Cette densité de courant est ici égale à la densité de courant de consommation de A à la concentration C_f à la surface du solide non réactif. Cette densité de courant est proportionnelle à la vitesse de consommation, selon une cinétique du premier ordre apparemment.



$J_{N,x}(x=x_f) = k_c C_f \Rightarrow D_e \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=x_f} = -k_c C_f$

Q7 - Régime stationnaire : $\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ (2) s'écrit $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$

* $F_A = \int_C S \vec{e}_x = -D_e \frac{\partial C}{\partial x} S$

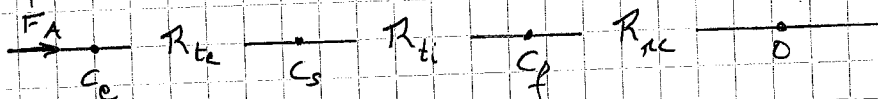
A est consommé par réaction avec le solide en $x=x_f$, donc $\frac{\partial C}{\partial x} < 0$

En régime stationnaire $\frac{d^2 C}{dx^2} = 0$ donc $\frac{dC}{dx} = \text{cte}$ indépendante de x

Q8 - $\frac{dC}{dx} = \text{cte} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = \frac{C_s - C_e}{0 - x} \Rightarrow F_A = D_e S \frac{C_s - C_e}{x}$

Q9 - U : équivalent de C. (les différences de concentration génèrent les courants de particules A.)

F_A : équivalent du courant électrique.



$R_{te} = \frac{C_e - C_s}{F_A} = \frac{1}{k_d S}$; $R_{ti} = \frac{C_s - C_f}{F_A} = \frac{x}{D_e S}$; $R_{rc} = \frac{C_f - C_s}{F_A} = \frac{1}{k_c S}$

L'équation 6 devient $F_A = \frac{C_e - C_s}{R_{te}} = \frac{C_s - C_f}{R_{ti}} = \frac{C_f - C_s}{R_{rc}}$

* Les résistances sont ici associées en série donc $R_{eq} = R_{te} + R_{ti} + R_{tc}$

Ainsi $C_e = 0 = R_{eq} \cdot F_A \rightarrow F_A = \frac{C_e}{R_{eq}}$

$$R_{eq} = \frac{1}{k_0 S} + \frac{x}{D_e S} + \frac{1}{k_c S}$$

Q10 - Vitesse de réaction $A + 2B \rightarrow \text{produits}$

$v = -\frac{dN_A}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dN_B}{dt}$ qu'on a déjà identifié à la condition limite (4)
 $F_A = v = -\frac{1}{2} \frac{dN_B}{dt} > 0$ donc N_B décroît au cours du temps.

Q11 - * $N_B(x) = S(e^{-x}) \frac{\rho_B}{M_B}$

* $F_A = -\frac{1}{2} \frac{dN_B}{dt} = S \frac{\rho_B}{M_B} \frac{dx}{dt}$ On pose $Q = \frac{S e \rho_B}{M_B}$

Démo non demandé: $\frac{C_e}{R_{eq}} = S \frac{\rho_B}{M_B} \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow dt = \frac{S}{C_e} \frac{\rho_B}{M_B} R_{eq} dx = \frac{\rho_B}{2 C_e M_B} \left(\frac{1}{k_0} + \frac{x}{D_e} + \frac{1}{k_c} \right) dx$

Q12 - L'intégration est immédiate: $t_f = K \left(\frac{x_f}{k_0} + \frac{x_f^2}{2 D_e} + \frac{x_f}{k_c} \right)$
 soit $t_f = \underbrace{\frac{K e}{k_0}}_{t_{0e}} \cdot \frac{x_f}{e} + \underbrace{\frac{K e^2}{2 D_e}}_{t_{0i}} \cdot \frac{x_f^2}{e^2} + \underbrace{\frac{K e}{k_c}}_{t_{0c}} \cdot \frac{x_f}{e}$

Q13 - $X_B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N_{B0} - N_B}{N_{B0}}$

Q14 - $N_{B0} = N_B(x=0) = S e \frac{\rho_B}{M_B}$ d'après Q11

$N_B = N_B(x \neq 0) = S(e^{-x}) \frac{\rho_B}{M_B} = N_{B0} - S x \frac{\rho_B}{M_B} = N_{B0} \left(1 - \frac{x}{e} \right)$

$\Rightarrow X_B = \frac{x_f}{e}$ pour $x = x_f$

D'où d'après Q12: $t_f = t_{0e} X_B + t_{0i} X_B^2 + t_{0c} X_B$

Q15 - Pour $x_f = e$, $X_B = 1 \rightarrow t_0 = t_{0e} + t_{0i} + t_{0c}$

Q16 - Si $e' = 2e$, $t'_{0e} = 2 t_{0e} = 120 \Delta$

$t'_{0i} = 4 t_{0i} = 1200 \Delta$

$t'_{0c} = 2 t_{0c} = 240$

$t'_0 = 1560 \Delta$; $t_0 = 480 \Delta \Rightarrow \frac{t'_0}{t_0} = 3,25$

Q17 - On souhaite $t_{oi} \gg t_{oe}$ et $t_{oi} \gg t_{oc}$

$$\rightarrow K \frac{e^2}{2De} \gg K \frac{e}{h_o} \quad \text{et} \quad K \frac{e^2}{2De} \gg K \frac{e}{h_c}$$

$$\rightarrow h_o \gg \frac{2De}{e} \quad \text{et} \quad h_c \gg \frac{2De}{e}$$

Ces conditions sont d'autant plus facilement réalisées si e est grand
d'où l'intérêt de diviser finement le solide.



PROBLÈME PC : Thermique dans un réacteur à eau pressurisée (CCP-PC-2013)

$$1. \quad \bar{\varphi}_v = \frac{P_{th}}{N_s \pi r_c^2 H} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varphi}_v = \frac{P_e}{N \eta \pi r_c^2 H} \quad \bar{\varphi}_v = 3,65 \cdot 10^8 \text{ W.m}^{-3}$$

$$2. \quad \bar{\varphi}_s = \frac{P_{th}}{N_s 2\pi r_c H} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varphi}_s = \frac{P_e}{N \eta 2\pi r_c H} \quad \bar{\varphi}_s = 7,3 \cdot 10^5 \text{ W.m}^{-2}$$

$$3. \text{Energie électrique fournie pendant 1 an: } E_e = 1,3 \cdot 10^{17} \text{ J}$$

$$N_f = \frac{E_e}{E_f} \quad \Rightarrow \quad N_f = 4,2 \cdot 10^{27}$$

$$4. \text{Supposons que le solide suive la 1ère loi de Joule: } dU = \delta m c dT$$

$$\text{où } \delta m = \rho dV \quad ; \quad \text{Volume du cylindre de hauteur } H: V = \pi r^2 H$$

$$\Rightarrow dU = 2\pi r \rho H c dr dT$$

$$5. \text{Système: Coque cylindrique de rayons compris entre } r \text{ et } r+dr.$$

Premier principe appliqué à ce système pendant dt .

$$dU = \delta Q + \delta W \quad \text{où } \delta W = 0 \text{ pour le solide incompressible.}$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= [\phi_{\text{entrant}}(r) - \phi_{\text{sortant}}(r+dr)] dt \\ &= [\varphi_s(r) 2\pi r H - \varphi_s(r+dr) 2\pi (r+dr) H] dt + \varphi_v 2\pi r H dr dt \\ &= \left(-\frac{\partial (r \varphi_s(r))}{\partial r} + \varphi_v r \right) 2\pi H dr dt \end{aligned}$$

$$\text{D'où } 2\pi r \rho c H dr dT = \left(-\frac{\partial (r \varphi_s(r))}{\partial r} + \varphi_v r \right) 2\pi H dr dT.$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varphi_s(r))}{\partial r} + \varphi_v$$

$$6. \text{Loi de Fourier: } \vec{j}_Q = -\lambda \text{ grad } T(r) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r \quad ; \quad \varphi_s = \vec{j}_Q \cdot \vec{e}_r$$

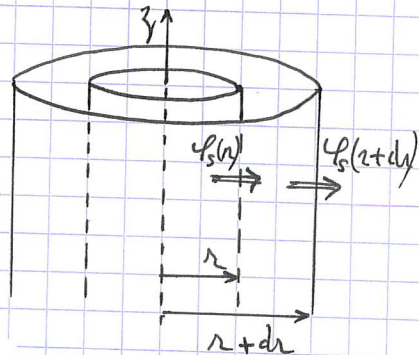
$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} + \varphi_v$$

$$7. \text{En régime stationnaire } \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda c}{r} \frac{\partial (r \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} = -\varphi_v$$

$$\frac{\partial (r \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} = -\varphi_v \frac{r}{\lambda c} \quad \text{qu'on intègre} \quad r \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\varphi_v r^2}{2\lambda c} + A$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\varphi_v \frac{r}{2\lambda c} + \frac{A}{r} \quad \text{qu'on intègre} \quad T(r) = -\varphi_v \frac{r^2}{4\lambda c} + A \ln(r) + B.$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } T(0) = T_0 \neq \infty &\Rightarrow A = 0 \\ T(r_c) = T_c = -\varphi_v \frac{r_c^2}{4\lambda c} + B &\Rightarrow T(r) = T_c + \frac{\varphi_v}{4\lambda c} (r_c^2 - r^2) \end{aligned}$$



$$\rightarrow \Delta T_{\text{comb}} = T_0 - T_c = \frac{\phi_v r_c^2}{4\lambda_c}$$

8. Dans la gaine de conductivité thermique λ_g , il n'y a pas de fissure ($\phi_v = 0$).
 L'équation de la chaleur en régime stationnaire s'écrit : $\lambda_g \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$
 qu'on intègre : $r \frac{dT}{dr} = C$ soit $T(r) = C \ln r + D$.
Conditions limites : $\begin{cases} T(r_c) = T_g = C \ln(r_c) + D \\ T(r_g) = T_p = C \ln(r_g) + D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_g - T_p = C \ln\left(\frac{r_c}{r_g}\right) \\ D = T_p - C \ln(r_g) \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} C = \frac{T_g - T_p}{\ln\left(\frac{r_c}{r_g}\right)} \\ D = T_p - \frac{T_g - T_p}{\ln\left(\frac{r_c}{r_g}\right)} \ln(r_g) \end{cases} \rightarrow T(r) = T_p + \frac{T_g - T_p}{\ln\left(\frac{r_c}{r_g}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_g}\right)$$

9. En régime stationnaire : $\phi_v \cdot \pi r_c^2 H = \phi_s(r) \cdot 2\pi r H \Rightarrow \phi_s(r) = \phi_v \frac{r_c^2}{2r}$

10. Loi de Fourier : $\phi_s(r) = -\lambda_g \frac{dT}{dr} = -\lambda_g \frac{T_g - T_p}{\ln\left(\frac{r_c}{r_g}\right)} \frac{1}{r}$

d'où $\Delta T_{\text{gain}} = T_g - T_p = \frac{\phi_v r_c^2}{2\lambda_g} \ln\left(\frac{r_g}{r_c}\right)$ $\Delta T_{\text{gain}} = 28 \text{ K}$

11. Comme au 9 : $\phi_v \pi r_c^2 H = \phi_s(r_c) \cdot 2\pi r_c H \Rightarrow \phi_s(r_c) = \phi_v \frac{r_c}{2}$

$\rightarrow T_c - T_g = R_{th} \phi_v \frac{r_c}{2}$ $\Delta T_{\text{enf}} = T_c - T_g = 73 \text{ K}$

12. Comme au 9 : $\phi_s(r_g) = \phi_v \frac{r_c^2}{2r_g} \Rightarrow \Delta T_{\text{conv}} = \phi_v \frac{r_c^2}{2r_g \alpha}$ $\Delta T_{\text{conv}} = 90 \text{ K}$

13. $\Delta T_{\text{rayon}} = \underbrace{T_0 - T_g}_{\Delta T_{\text{comb}}} + \underbrace{T_c - T_g}_{\Delta T_{\text{enf}}} + \underbrace{T_g - T_p}_{\Delta T_{\text{gain}}} + \underbrace{T_p - T_p}_{\Delta T_{\text{conv}}}$

$\rightarrow \Delta T_{\text{rayon}} = \phi_v \left(\frac{r_c^2}{4\lambda_c} + R_{th} \frac{r_c}{2} + \frac{r_c^2}{2\lambda_g} \ln\left(\frac{r_g}{r_c}\right) + \frac{r_c^2}{2r_g \alpha} \right) = A \phi_v$

Application numérique : $\Delta T_{\text{comb}} = 400 \text{ K} \Rightarrow \Delta T_{\text{rayon}} = 521 \text{ K}$

14. Système : Section de passage du fluide, de hauteur dz .
 Elle est en contact thermique avec 4 quarts de rayons (soit 1 rayon)

D'où le bilan thermique : $\phi_2(z) dz = \phi_s(r_g) \cdot 2\pi r_g dz$

où $\phi_s(r_g) = \phi_v \frac{r_c^2}{2r_g}$ (d'après 9) $\rightarrow \phi_2(z) = \phi_v(z) \pi r_c^2$

15 - Appliquons le premier principe au système ouvert au fluide caloporteur, entre z et $z+dz$

$$\delta m dh = \delta Q + \delta W_u \quad \text{ou} \quad \delta W_u = 0 \quad \text{car il n'y a pas de partie motrice dans le fluide}$$

$$\delta m = \dot{m} dt$$

$$dh = c_p (T_f(z+dz) - T_f(z)) \quad \text{selon la 1^{re} loi de Joule applicable au liquide caloporteur incompressible}$$

$$\delta Q = \varphi_L(z) dz dt$$

$$\text{D'où} \quad \dot{m} c_p \frac{dT_f}{dz} = \varphi_L(z)$$

$$16. \quad \dot{m} c_p \frac{dT_f}{dz} = \frac{\pi r_c^2 \bar{\varphi}_v}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \rightarrow T_f(z) = \frac{\pi r_c^2 H}{2 \dot{m} c_p} \bar{\varphi}_v \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + F$$

$$\text{Condition limite : } T(-\frac{H}{2}) = T_{fc} = -\frac{H \pi r_c^2 \bar{\varphi}_v}{2 \dot{m} c_p} + F$$

$$\rightarrow T_f(z) = \underbrace{\frac{H \bar{\varphi}_v \pi r_c^2}{2 \dot{m} c_p} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)}_C + \underbrace{\frac{\pi r_c^2 H \bar{\varphi}_v}{2 \dot{m} c_p} + T_{fc}}_B$$

$$17. \quad T_o(z) = \Delta T_{\text{calorif}} + T_f(z) = A \bar{\varphi}_v(z) + B + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

$$T_o(z) = A \frac{\pi}{2} \bar{\varphi}_v \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + B + \frac{H \bar{\varphi}_v \pi r_c^2}{2 \dot{m} c_p} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

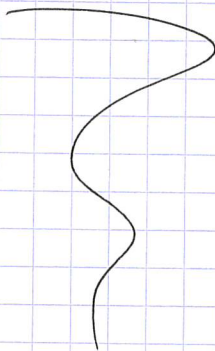
$$\text{Recherchons } T_o(z_{\max}) : \frac{dT_o(z)}{dz} = -A \frac{\pi^2}{2H} \bar{\varphi}_v \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{\pi r_c^2 \bar{\varphi}_v}{\dot{m} c_p} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) = 0$$

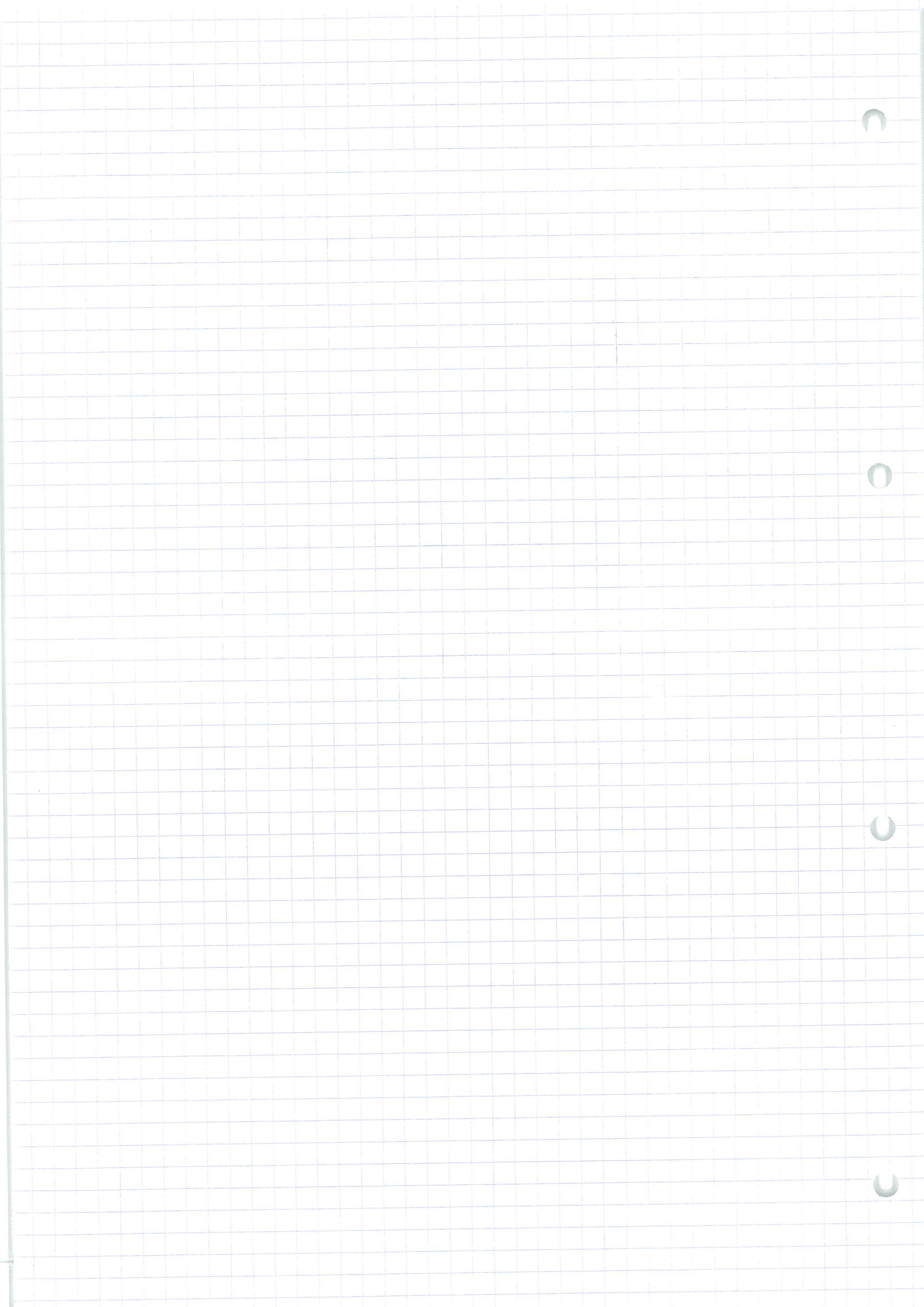
$$\text{si : } \tan\left(\frac{\pi z_{\max}}{H}\right) = \frac{r_c^2 H}{A \dot{m} c_p} \rightarrow z_{\max} = \frac{H}{\pi} \arctan\left(\frac{r_c^2 H}{A \dot{m} c_p}\right)$$

$$\text{A.N. : } A = 1,43 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^3 \text{ W}^{-1}$$

$$z_{\max} = 4 \text{ cm}$$

$$T_o(z_{\max}) = 1134^\circ \text{C}$$





AUTOUR D'UNE CENTRALE NUCLÉAIRE

(Centrale Supélec - PSI - 2024)

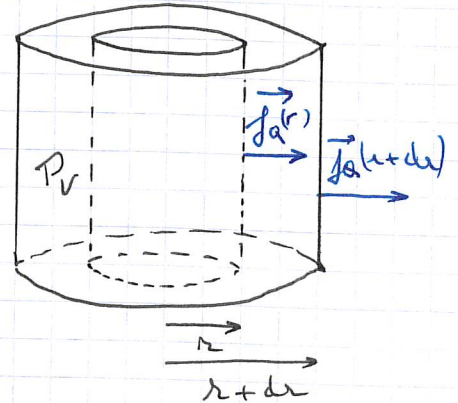
Q1 - $S_{\text{tot}} = NH \cdot 2\pi R_3$ soit $S_{\text{tot}} = \pi NH d$ $S_{\text{tot}} = 4,53 \cdot 10^3 \text{ m}^2$

Q2 - Le laplacien en coordonnées cylindriques n'étant pas fourni, on effectue un bilan thermique entre deux cylindres de rayons r et $r+dr$. ($r < R_3$) de hauteur H .

En régime stationnaire, l'énergie interne du système se conserve entre t et $t+dt$:

$d(SU) = \delta Q = 0$ $\delta W = 0$ car système solide.

$$\frac{\delta Q}{dt} = \underbrace{\iint_{\text{cylindre rayon } r} \vec{j}_Q(r) \cdot d\vec{S}}_{\text{cylindre rayon } r} - \underbrace{\iint_{\text{cylindre rayon } r+dr} \vec{j}_Q(r+dr) \cdot d\vec{S}}_{\text{cylindre rayon } r+dr} + \underbrace{\iiint_{\text{volume système}} P_v dt}_{\text{volume système}}$$



où $\vec{j}_Q(r) = j_Q(r) \vec{e}_r$ car la diffusion thermique est radiale par hypothèse

Loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda_2 \text{grad } T = -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$

$\frac{\delta Q}{dt} = 0 = -\lambda_2 \frac{dT}{dr}(r) \cdot 2\pi r H + \lambda_2 \frac{dT}{dr}(r+dr) \cdot 2\pi(r+dr)H + P_v 2\pi r H dr$

soit $\lambda_2 \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + P_v r^2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{P_v}{\lambda_2} r = 0$

On pose $A = \frac{P_v}{\lambda_2}$

Q3 - $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -A r$, qu'on intègre $r \frac{dT}{dr} = -\frac{A r^2}{2} + B$

$\frac{dT}{dr} = -\frac{A r}{2} + \frac{B}{r}$, qu'on intègre : $T(r) = -\frac{A r^2}{4} + B \ln r + C$.

* $T(r)$ est finie donc $B = 0$. car $r \in [0, R_3]$.

* Condition limite : $T(R_3) = T_2 = -\frac{A R_3^2}{4} + C \rightarrow C = T_2 + \frac{A R_3^2}{4}$

$\rightarrow T(r) = T_2 + \frac{A}{4} (R_3^2 - r^2)$

Q4 - Cette question suggère d'utiliser la loi de Newton pour faire apparaître h_2 alors qu'il n'y a pas de fluide à l'interface.

On peut supposer qu'il s'agit d'une modélisation linéaire choisie pour déterminer la température de contact

On affirme qu'en régime stationnaire, la puissance P_1 produite constitue le flux conducto-convectif total à travers la surface de rayon $R_3 = R_4 - e = \frac{d}{2} - e$.

$$P_1 = 2\pi R_3 H (T_2 - T_3) h_2 = h_2 N \pi H (d - 2e) (T_2 - T_3) \Rightarrow T_3 = T_2 - \frac{P_1}{\pi (d - 2e) N H h_2}$$

Q5. En l'absence de source dans la gaine, le flux P_1 traverse toute surface cylindrique de rayon $r \in [R_3, R_4]$.

$$P_1 = \iint \vec{q}(r) \cdot \vec{dS} = -\lambda_3 \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi r N H$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{P_1}{2\pi N H \lambda_3 r} \quad \text{qu'on intègre : } T(r) = -\frac{P_1}{2\pi N H \lambda_3} \ln r + D$$

$$\text{C.L. : } T(R_4) = T_4 = -\frac{P_1}{2\pi N H \lambda_3} \ln(R_4) + D \Rightarrow D = T_4 + \frac{P_1}{2\pi N H \lambda_3} \ln(R_4)$$

$$\Rightarrow T(r) = T_4 + \frac{P_1 R_4 \ln\left(\frac{R_4}{r}\right)}{S_{\text{tot}} \lambda_3}$$

Q6. T_5 étant la seule température donnée, il faut l'exprimer en fonction de T_4

$$\text{De même qu'à la Q4 : } P_1 = 2\pi N R_4 H (T_4 - T_5) h_4 = S_{\text{tot}} h_4 (T_4 - T_5)$$

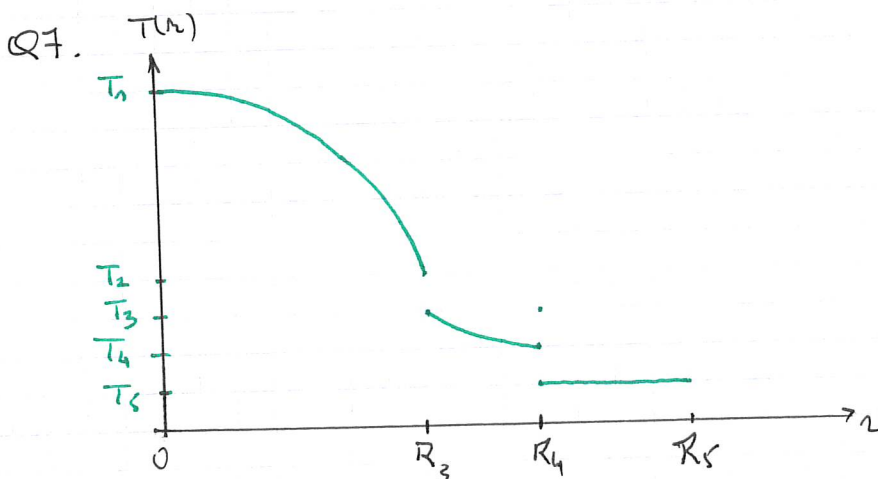
$$\Rightarrow T_4 = T_5 + \frac{P_1}{S_{\text{tot}} h_4} \quad \text{A.N. : } T_4 = 328^\circ\text{C}$$

$$T_3 = T_4 + \frac{P_1 R_4}{S_{\text{tot}} \lambda_3} \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right) = T_4 + \frac{P_1 d}{2S_{\text{tot}} \lambda_3} \ln\left(\frac{d}{d-2e}\right) \Rightarrow T_3 = 352^\circ\text{C}$$

$$T_2 = T_3 + \frac{P_1}{\pi (d-2e) N H h_2} \Rightarrow T_2 = 422^\circ\text{C}$$

$$T_1 = T_2 + \frac{P_V R_3^2}{4\lambda_2} \quad \text{or } P_1 = P_V N \pi R_3^2 H \Rightarrow T_1 = T_2 + \frac{P_1}{4\pi \lambda_2 N H}$$

$$T_1 = 838^\circ\text{C}$$



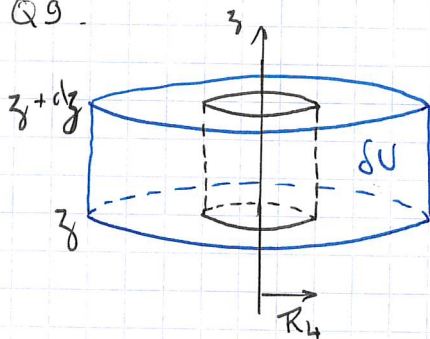
Q8. Le pressuriseur permet de maintenir une pression supérieure à la pression de vapeur saturante à T_5 afin de maintenir l'état liquide

3

S'il apparaît de la vapeur, le coefficient d'échange h_4 chute ce qui réduira l'évacuation de la chaleur produite par la fission. Cela risque d'entraîner une surchauffe du cœur pouvant aller jusqu'à sa fusion.

On peut envisager une puissance plus importante en augmentant le débit du fluide caloporteur.

Q9.



Système: Tranche annulaire d'eau entre z et $z+dz$.

En régime stationnaire son énergie interne SU ne varie pas malgré les échanges thermiques entre t et $t+dt$.

$$d(SU)/dt = 0 = dU_{entrant}(z) - dU_{sortant}(z+dz) + \delta Q_{fission}.$$

On utilise le modèle pour l'eau de la phase condensée indilatable et incompressible. Donc son énergie interne ne dépend que de sa température.

Ainsi $0 = D_m dt c_s T(z) - D_m dt c_s T(z+dz) + P_v \pi R_4^2 dz dt$

$$\Rightarrow \underline{D_m c_s [T(z+dz) - T(z)] = P_v \pi R_4^2 dz}$$

Q10. Soit $D_m c_s dT = P_v(z) \pi R_4^2 dz$ qu'on intègre entre $z=0$ et $z=H$.

$$\begin{aligned} * D_m c_s (T_s - T_e) &= \pi R_4^2 \int_0^H P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz \\ &= \pi R_4^2 \frac{H}{\pi} P_0 \left[-\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]_0^H = 2 P_0 R_4^2 H. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{T_s - T_e = \frac{2 P_0 R_4^2 H}{D_m c_s}}$$

On constate que de façon prévisible, $T_s - T_e$ est une fonction décroissante du débit, cohérent avec la remarque du Q8.

* En intégrant entre $z=0$ et z

$$D_m c_s (T(z) - T_e) = R_4^2 H P_0 \left[-\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]_0^z$$

$$T(z) = T_e + \frac{R_4^2 H P_0}{D_m c_s} (1 - \cos(\frac{\pi z}{H})) \text{ soit } \underline{T(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} (1 - \cos(\frac{\pi z}{H}))}$$

Q11. On écrit localement, la continuité du flux thermique à l'interface crayon/fluide, sur le même système microscopique que précédemment

$$P_v(z) \pi R_4^2 dz = h_{cc} 2\pi R_4 dz (T_p(z) - T(z))$$

$$\Rightarrow T_p(z) = T(z) + \frac{P_0 R_4}{2 h_{cc}} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

A l'aide des réponses de Q10 on obtient

$$T_p(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right) + (T_s - T_e) \frac{D_m C_s}{4 h_{cc} R_4 H} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

d'où $\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{D_m C_s}{2 h_{cc} R_4 H} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$ On pose $B = -1$
 $C = \frac{D_m C_s}{2 h_{cc} R_4 H}$

Q12 - On reprend le résultat de Q3 où on remplace P_v par $P_v(z)$, et R_3 par R_4 , T_2 par $T_p(z)$

$$T_c(r, z) = T_p(z) + \frac{P_v(z) (R_4^2 - r^2)}{4 \lambda_2} \rightarrow T_c(r, z) = T_p(z) + \frac{P_0 R_4^2}{4 \lambda_2} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

où $P_0 R_4^2 = (T_s - T_e) \frac{D_m C_s}{2 H}$ et on injecte l'expression précédente de $T_p(z)$

$$T_c(r, z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \frac{T_s - T_e}{2} \cdot \frac{D_m C_s}{4 \lambda_2 H} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

$$\rightarrow \frac{T_c(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + \underbrace{B}_{D} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \underbrace{\left[\frac{C}{2} + \frac{D_m C_s}{8 \lambda_2 H} \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right]}_{E + F} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

$$D = B = -1; \quad E = \frac{C}{2} = \frac{D_m C_s}{4 h_{cc} R_4 H}; \quad F = \frac{D_m C_s}{8 \lambda_2 H}$$

Q13. $T_c(0, z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \frac{D_m C_s}{2 H} \left[\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2 \lambda_2} \right] \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$

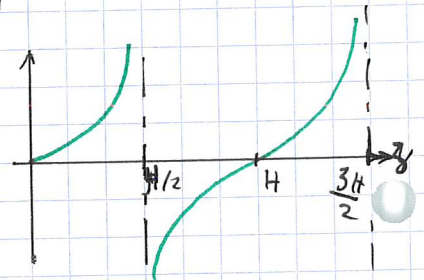
Q14. $\frac{dT_c}{dz} = \frac{T_s - T_e}{2} \left[\frac{\pi}{H} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + \frac{D_m C_s}{2 H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2 \lambda_2} \right) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] = 0$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi z}{H}\right) = - \frac{D_m C_s}{2 H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2 \lambda_2} \right) < 0$$

donc $\frac{H}{2} < z_{\max} < H$.

d'où $\frac{\pi z_{\max}}{H} = \pi - \arctan\left(\frac{D_m C_s}{2 H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2 \lambda_2} \right) \right)$

$$z_{\max} = H - \frac{H}{\pi} \arctan\left(\frac{D_m C_s}{2 H} \left(\frac{1}{h_{cc} R_4} + \frac{1}{2 \lambda_2} \right) \right) \quad z_{\max} = 1,86 \text{ m} \approx \frac{H}{2}$$



$$T_c(z_{\max}) = 97,1^\circ \text{C}$$

Cette température est très inférieure à la température de fusion de UO_2 .

Q15 - L'eau s'échauffe au cours de sa circulation le long du rayon, ce qui va augmenter la température de la paroi.

Le rayon a une température de cœur maximale en $z \approx \frac{H}{2}$. Au delà, l'écart de température avec l'eau s'accroît donc la évacuée par convection croît.

Par ailleurs, cette dernière s'annule en $z=0$ et $z=H$.

Ces deux effets antagonistes amènent un maximum de T_p en $\frac{H}{2} < z < H$.

d'où $T_p(0) = T_e$ et $T_p(H) = T_s$.