



Samedi 7 décembre 2024

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

2024-2025

**Recommandations :**

- Pour choisir l'ordre dans lequel vous traiterez les problèmes lisez le sujet en entier au préalable.
- Les résultats littéraux et numériques doivent être **encadrés**.
- Un résultat numérique sans **unité** est considéré faux.
- Les **correcteurs** (effaceurs, peinture, ruban, stylo à friction) sont interdits.
- La rédaction se fait en langue française respectant syntaxe, grammaire et orthographe.
- Une relecture finale attentive, 15 minutes avant la fin de l'épreuve est indispensable.

**Pénalité :** Un défaut de qualité de la copie (présentation, écriture, orthographe, syntaxe) pourra faire l'objet d'une pénalité de 1 ou 2 points sur la note finale.

*Problème Pour Tous*

**ÉTUDE D'UN ÉCOULEMENT DANS UN TUYAU CYLINDRIQUE**

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide incompressible de viscosité  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$  dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz, de longueur L et de rayon R. Cet écoulement unidirectionnel est caractérisé dans un repère cylindrique  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  par un champ de vitesse  $\vec{v} = v(r, \theta, z, t)\vec{e}_z$  qui vérifie l'équation de Navier-Stokes,

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

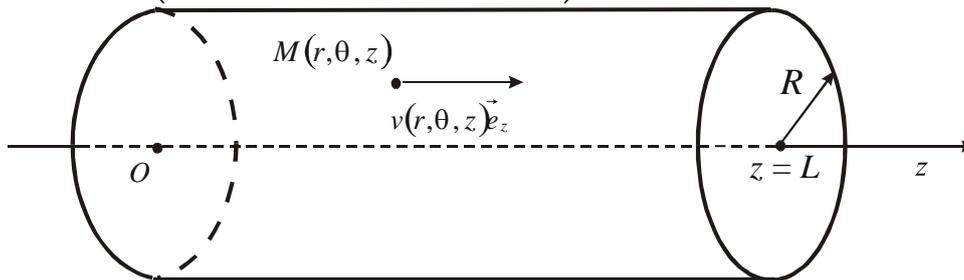
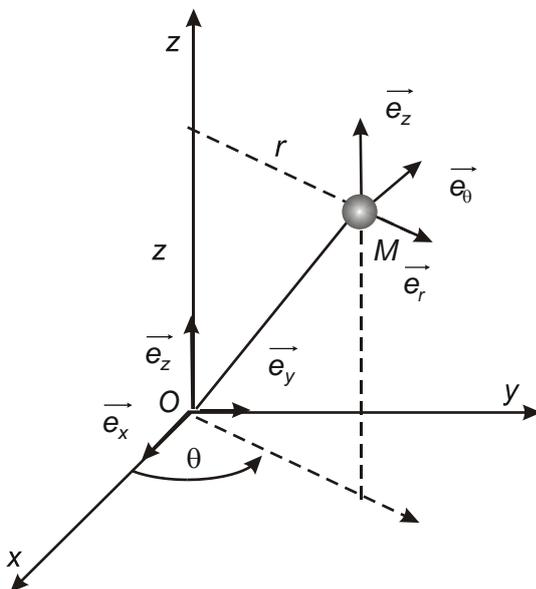


Figure 1

On note  $P(z=0) = P_0$  et  $P(z=L) = P_L$ . On néglige les phénomènes de pesanteur.

**Données pour les coordonnées cylindriques**



$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

$$\Delta(f(r)) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}[f(r, \theta, z)] = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \cdot \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \cdot \vec{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \cdot A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{e}_z$$



- 1 - Justifier pourquoi le champ de vitesse est indépendant de  $\theta$ .
- 2 - Rappeler dans le cas général, l'équation locale de conservation de la matière.  
Que devient cette relation dans le cas d'un fluide incompressible ?  
En déduire que le champ de vitesse ne dépend pas de  $z$ .
- 3 - Quelle propriété présente le champ de vitesse dans le cas d'un écoulement stationnaire. On étudie maintenant un écoulement stationnaire.
- 4 - En projetant l'équation de Navier-Stokes dans la base cylindrique, montrer que  $P$  ne dépend que de  $z$  et établir une équation différentielle reliant  $v(r)$ ,  $r$  et  $\frac{dP}{dz}$ . Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques sont données à la fin du sujet.
- 5 - Etablir l'expression de  $P(z)$  en fonction de  $P_0, P_L, z$  et  $L$ .
- 6 - En déduire que le champ de vitesse s'écrit  $v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} (R^2 - r^2)$  sachant que la vitesse en  $r = 0$  est bornée.  
Tracer le profil de la vitesse.  
Préciser la valeur maximale  $v_{max}$  de la vitesse.

### RESISTANCE HYDRAULIQUE

- 9 - Calculer le débit volumique  $Q$  dans la conduite. On l'exprimera sous la forme  $Q = K(P_0 - P_L)$  connue sous le nom loi de Poiseuille. Exprimer la constante  $K$ .  
En déduire la vitesse moyenne,  $v_{moy}$  en fonction de  $L, P_0, P_L, R$  et  $\eta$ .  
La comparer à la vitesse maximale,  $v_{max}$ .
- 10 - On définit  $R_{Hy}$ , résistance hydraulique de longueur  $L$  et de surface  $S$ , par la relation  $P_0 - P_L = R_{Hy}Q$ .  
Exprimer  $R_{Hy}$  en fonction de  $L, R$  et  $\eta$ . Quelle est l'analogie avec la définition de la résistance électrique ?
- 11 - Comment varie la résistance hydraulique  $R_{Hy}$  avec le rayon  $R$  ?  
Comparer ce résultat avec la résistance électrique d'un barreau de longueur  $L$  de section  $S = \pi R^2$  et de conductivité électrique  $\sigma$ . Justifier qualitativement la différence.
- 12 - La loi de Poiseuille n'est valable que pour un **écoulement laminaire**.  
Rappeler la signification du terme en gras.  
En déduire une inégalité sur le rayon  $R$  pour que le calcul soit valable si on prend une vitesse moyenne  $v_{moy} = 0,1 \text{ m/s}$ , une viscosité dynamique  $\eta = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et une masse volumique  $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### ASSOCIATION DE RESISTANCES HYDRAULIQUES

13. On associe deux cylindres  $A_1$  et  $A_2$  (figure 3) de résistances hydrauliques  $R_{Hy1}$  et  $R_{Hy2}$  de même section  $S$ , l'un est compris entre  $x_0 = 0$  et  $x_1 = L_1$ , le second est compris entre  $x_1 = L_1$  et  $x_2 = L_1 + L_2$ . On note  $P_0, P_1$  et  $P_2$  les pressions pour  $x_0 = 0, x_1 = L_1, x_2 = L_1 + L_2$ . On néglige les pertes de charges au niveau du raccordement.

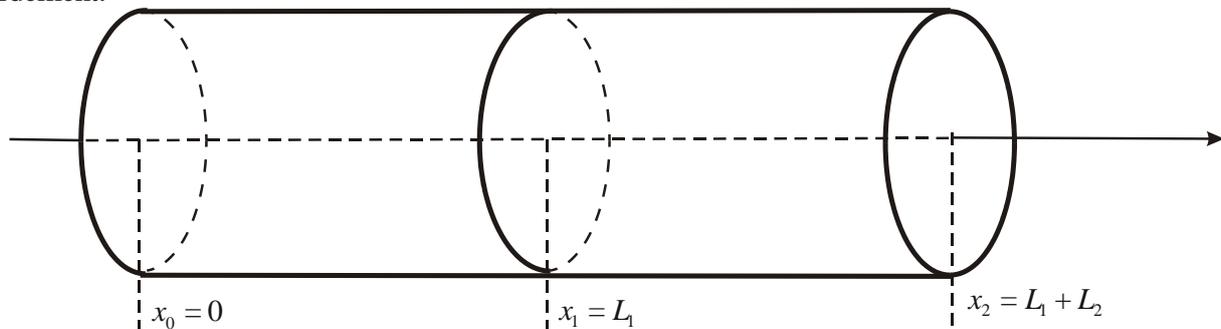


Figure 3

- a) Établir l'expression de la résistance hydraulique  $R_{Hy}$  (qu'on définit bien sûr par la relation :  $P_0 - P_L = R_{Hy}Q$ ) de l'ensemble en fonction de  $R_{Hy1}$  et  $R_{Hy2}$ . Indiquer, en la justifiant, une analogie avec un problème d'électrocinétique.
- b) En déduire la pression  $P_1$  en fonction de  $P_0, P_2, R_{Hy1}$  et  $R_{Hy2}$ .

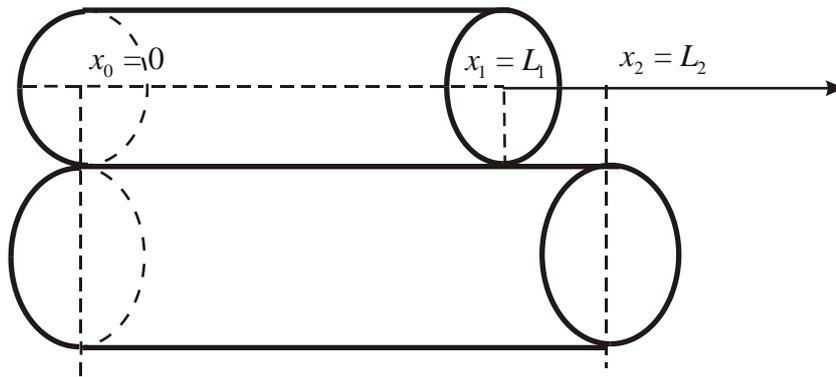


Figure 4

14. Les deux cylindres  $A_1$ , de section  $S_1$  et de longueur  $L_1$  et  $A_2$  de section  $S_2$  et de longueur  $L_2$  sont associés en « parallèle » (figure 4). On note  $P_0$ , la pression sur les faces d'entrée pour  $x_0 = 0$  et  $P_1$ , la pression sur les faces de sorties ( $x_1 = L_1$  pour  $A_1$ , et  $x_2 = L_2$  pour  $A_2$ ).

Établir l'expression de la résistance hydraulique de cette association en raisonnant par analogie avec l'électrocinétique.

En déduire le débit  $Q_1$  dans le cylindre  $A_1$  de section  $S_1$  en fonction du débit total  $Q, R_{Hy1}$  et  $R_{Hy2}$ .

15. Rappeler l'expression de la puissance électrique dissipée dans une résistance électrique,  $R$  traversée par un courant d'intensité  $I$ . Par analogie, déterminer la puissance dissipée par les forces de viscosité en fonction de  $R_{Hy}$  et  $Q$ .

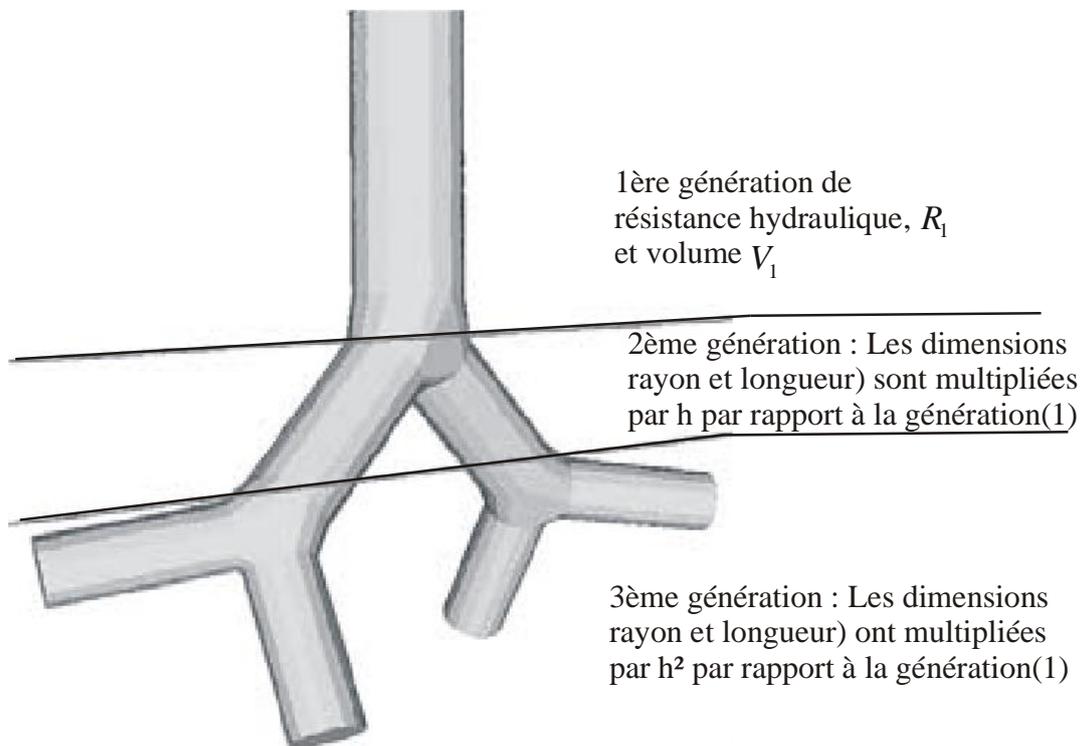
### L'ARBRE BRONCHIQUE ET L'ENTROPIE



Dans un arbre bronchique, les voies respiratoires se divisent par dichotomie avec une réduction systématique de la longueur et du diamètre. Dans le problème, nous allons supposer que la trachée se divise en deux bronches. Chacune d'elles se divise à son tour en deux autres, et ainsi de suite. Nous notons les différentes subdivisions qui seront indicées par les nombres successifs,  $p$  : la trachée est la génération  $p = 1$ , les bronches,  $p = 2$ , et ainsi de suite. Nous nous plaçons en régime permanent et l'air est assimilé à un fluide de viscosité  $\eta$ .

Une bronchiole de génération  $p$  est assimilée à un cylindre de rayon  $r_p$  et de longueur  $l_p$ . Nous admettrons que la loi de Poiseuille établie précédemment reste valable (en particulier entre  $p = 6$  et  $p = 16$ ).

A chaque génération, chaque dimension (rayon comme longueur) est multiplié par une constante  $h$  que l'on supposera identique pour les deux dimensions.



- 16.** Déterminer le nombre  $N(p)$  de bronchioles à la  $p^{\text{ième}}$  génération en fonction de  $p$ .
- 17.** Déterminer le rayon  $r_p$  et la longueur  $l_p$  de la bronchiole de génération  $p$  en fonction de  $p$ ,  $h$ ,  $r_1$  et  $l_1$ , valeurs pour  $p = 1$ .
- 18.** Calculer le volume  $V_p$  d'une bronchiole de génération  $p$  en fonction de  $V_1, h$  et  $p$ . En déduire le volume total  $V_{pt}$  de la génération  $p$ . On posera  $X = 2h^3$ .  
Montrer que le volume de l'arbre supposé contenir  $n$  générations est  $V_t = V_1 \frac{1-X^n}{1-X}$ .
- 19.** Calculer la résistance hydraulique  $R_p$  d'une bronchiole de génération  $p$  en fonction de  $R_1$ , résistance hydraulique pour  $p = 1$  et  $p$ . En déduire la résistance hydraulique  $R_{tp}$  totale de la génération  $p$ .  
Déterminer la résistance hydraulique  $R_t$  de l'arbre supposé contenir  $n$  générations.
- 20.** Montrer que le volume total diverge quand  $n \rightarrow \infty$  lorsque  $h$  est supérieure à une valeur critique  $h_c$  dont on précisera la valeur numérique.  
A quelle condition sur  $h$ , la résistance hydraulique diverge-elle ?

### Principe des capteurs pneumatiques

Un véhicule est détecté lors de son passage sur un tube en caoutchouc placé perpendiculairement à la chaussée (figure 1). Le tube est bouché à une extrémité et relié à un compteur à l'autre extrémité. Les roues du véhicule écrasent localement le tube.

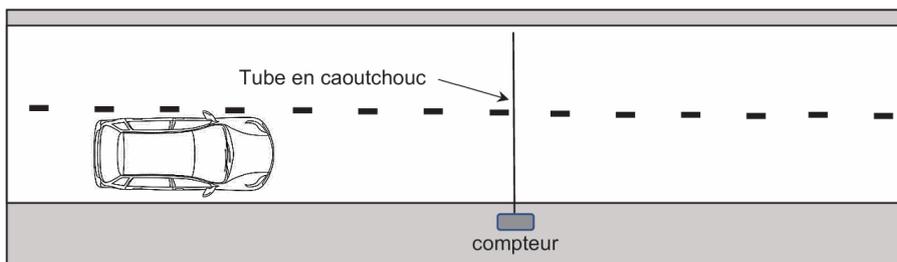


Figure 1 : Capteur pneumatique

Il s'ensuit une variation de pression dans le tube qui se propage jusqu'aux extrémités. Le compteur associé transforme ce déplacement d'air en signal électrique.

#### 1 – Propagation des ondes acoustiques dans un tube souple

On considère un tube en caoutchouc de section circulaire et d'axe  $Ox$  rempli d'air (figure 2). Au repos, l'air a une masse volumique  $\mu_0$  et une pression intérieure  $P_0$  égale à la pression extérieure. A l'équilibre, on suppose que le champ de vitesses est nul et que la section du tube est uniforme et notée  $A_0$ .

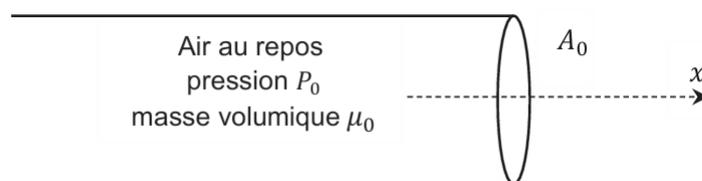


Figure 2 : Tube de section  $A_0$  rempli d'air au repos.

On s'intéresse à la propagation de perturbations de petites amplitudes suivant l'axe  $Ox$ , ce qui permet de se placer dans l'approximation acoustique. Les champs de vitesse, de pression et de masse volumique s'expriment alors sous la forme :

$$\vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{u}_x$$

$$P(x, t) = P_0 + p_1(x, t) \quad \text{où } |p_1(x, t)| \ll P_0$$

$$\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t) \quad \text{où } |\mu_1(x, t)| \ll \mu_0$$

$\vec{v}(x, t)$  est appelée la vitesse acoustique et  $p_1$  est la surpression par rapport à  $P_0$ . On suppose que ces grandeurs sont uniformes sur une section du tube, les effets de la pesanteur étant négligés.

L'air est considéré comme un gaz parfait, on ne tient pas compte de la viscosité ni des échanges thermiques à l'intérieur du tube au sein de l'air. Les détentes et les compressions locales du fluide sont isentropiques. Le coefficient de compressibilité isentropique, constant, s'écrit :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu(x, t)} \left( \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial P(x, t)} \right)_s$$

Le tube se déforme sous l'effet de l'augmentation de la pression interne. La section  $A(x, t)$  du tube varie légèrement, devenant dépendante de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ . On pose alors :

$$A(x, t) = A_0 + a_1(x, t) \quad \text{où } |a_1(x, t)| \ll A_0$$

On peut alors décrire ce phénomène par un paramètre  $D$ , appelé distensibilité du tube qui s'exprime comme

$$D = \frac{1}{A(x, t)} \left( \frac{\partial A(x, t)}{\partial P(x, t)} \right)_s$$

La distensibilité, supposée constante, caractérise l'aptitude du tube à se déformer au passage de l'onde de pression.

#### Equation de conservation de la masse

On étudie comme système une tranche d'air d'épaisseur  $dx$  située entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$ , sur un intervalle de temps entre  $t$  et  $t+dt$ .

Q1 - Exprimer la masse  $dm(t)$  de ce système à l'instant  $t$  en fonction de  $A(x, t)$ ,  $\mu(x, t)$  et de  $dx$ . De la même manière, exprimer  $dm(t+dt)$  à l'instant  $t+dt$ .

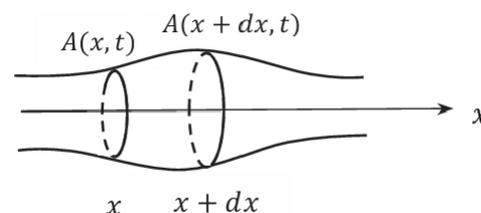


Figure 3 : Système étudié : tranche d'air d'épaisseur  $dx$

**Q2** - Exprimer la masse  $\delta m_e$  de fluide entrant dans ce système pendant la durée  $dt$  en fonction de  $\mu(x,t)$ ,  $v(x,t)$ ,  $A(x,t)$  et  $dt$ . De la même manière, exprimer la masse  $\delta m_s$  sortant de ce système pendant la même durée.

**Q3** - En réalisant un bilan de masse sur le système considéré, établir avec soin que l'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mu(x,t)A(x,t)] + \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x,t)A(x,t)v(x,t)] = 0 \quad (1)$$

### Equation d'Euler

**Q5** - Rappeler l'équation d'Euler régissant la dynamique des fluides parfaits en tenant compte des hypothèses de l'étude. Préciser le nom des deux termes qui composent la dérivée particulaire.

**Q6** - Linéariser l'équation d'Euler afin d'établir une relation entre  $\mu_0$ ,  $v(x)$  et  $p_I(x,t)$ . La relation obtenue est notée (2).

### Distensibilité du tube

**Q7** - En linéarisant l'expression de la distensibilité, montrer que  $a_I$  est proportionnel à  $p_I$ . La relation obtenue est notée (3).

### Coefficient de compressibilité isentropique

**Q8** - Linéariser l'expression du coefficient de compressibilité isentropique et montrer que  $\mu_I$  est proportionnel à  $p_I$ . La relation obtenue est notée (4).

### Equation de propagation des ondes sonores dans le tube souple

**Q9** - A l'aide des relations (1), (3) et (4), démontrer la relation suivante :

$$(\chi_S + D) \frac{\partial p_I(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

**Q10** - Montrer que la surpression  $p_I(x,t)$  obéit à une équation d'onde de type d'Alembert avec une célérité  $c$  qui sera exprimée en fonction de  $\chi_S$ ,  $D$  et de  $\mu_0$ . Vérifier l'unité de  $c$

**Q11** - Calculer numériquement la valeur de  $c$  avec  $D = 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $\chi_S = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$  et  $\mu_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**Q12** - Montrer que, pour une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants, on peut définir une grandeur  $Y$  appelée *admittance acoustique*, telle que le débit volumique  $Q\left(t - \frac{x}{c}\right)$  soit relié à la surpression  $p\left(t - \frac{x}{c}\right)$  par la relation :

$$Q\left(t - \frac{x}{c}\right) = Y p\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

(Noter qu'on définit ici une admittance acoustique comme une expression reliant le débit –et non la vitesse– à la surpression).

Donner que l'expression de  $Y$  à l'ordre 0 est  $Y = \frac{A_0}{\mu_0 c}$ .

Calculer numériquement  $Y$  avec  $A_0 = 1,0 \text{ cm}^2$ .

## 2 - Analyse quantitative d'un changement de tuyau

On étudie maintenant l'influence d'une modification, en  $x = 0$ , des propriétés du tuyau. Celle-ci peut être un changement de la section ou de l'épaisseur du tuyau ou un changement dans ses propriétés mécaniques (module d'Young). Ces modifications peuvent conduire à un changement dans les valeurs de l'admittance acoustique  $Y$  et de la célérité  $c$ .

On supposera que les modifications de propriétés étudiées dans ce problème permettront d'admettre qu'à la traversée d'un raccordement il y a continuité de la surpression et du débit volumique:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} p(x,t) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x,t) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} Q(x,t) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} Q(x,t) \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on considérera que le tuyau est constitué de deux tubes : le tube 1 pour les  $x$  négatifs, de célérité  $c_1$  et d'admittance acoustique  $Y_1$ , et le tube 2 pour les  $x$  positifs, de célérité  $c_2$  et d'admittance acoustique  $Y_2$ .

**Q13** – Une onde progressive harmonique se propage dans le sens des  $x$  croissants dans le tube 1.

La surpression associée est notée  $p_e(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$ .

En  $x = 0$  vont apparaître une onde réfléchie  $p_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$  et une onde transmise  $p_t(x, t) = h\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$ .

Exprimer, en fonction de  $f$  et des admittances  $Y_1$  et  $Y_2$ , les fonctions  $g$  et  $h$ .

Donner l'expression du coefficient de réflexion  $r = \frac{g}{f}\Big|_{x=0}$ .

A quelle condition sur  $Y_1$  et  $Y_2$  n'y a-t-il pas d'onde réfléchie ?

**Q14** – On rappelle l'expression du vecteur densité surfacique de puissance acoustique  $\vec{\Pi} = p \cdot v \cdot \vec{u}_x$  en fonction de la surpression  $p$  et de la vitesse  $v$ . En déduire l'expression de la puissance  $\mathcal{P}$  à travers un tuyau en fonction de la surpression et de l'admittance.

On note  $\mathcal{P}_i$  et  $\mathcal{P}_r$  les puissances mesurées au voisinage de l'origine et associées aux ondes incidente et réfléchie respectivement.

Exprimer le coefficient de réflexion en puissance  $R = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i}$  en fonction de  $Y_1$  et  $Y_2$ .

Calculer  $R$  en considérant que le tube 1 est un tuyau en caoutchouc étudié dans la **partie 1**, et le tube 2 un tuyau métallique, donc de distensibilité nulle. Les deux tubes ont même section  $A_0 = 1,0 \text{ cm}^2$ .

**Commenter.**

---

## La lévitation acoustique

La lévitation acoustique consiste à maintenir de la matière en suspension au sein d'un milieu fluide ambiant, l'air par exemple, en opposant au poids de l'objet lévitant la force résultant de la pression de radiation d'ondes sonores intenses. La possibilité de mettre en lévitation des échantillons solides ou liquides, de faible masse, est maintenant bien établie, et des avancées récentes laissent entrevoir des applications concrètes de ce procédé.

En 2013, une équipe de chercheurs suisses<sup>1</sup> a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant un transport *contrôlé* de petits objets. Ils sont ainsi parvenus à mélanger une gouttelette d'eau et un granulé de café soluble. Cette expérience *a priori* ludique recèle en réalité des applications technologiques et industrielles extrêmement précieuses, telle que le contrôle de certains procédés chimiques ou biologiques. En 2015, c'est une équipe de recherche sud-américaine<sup>2</sup> qui a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant de transporter des objets avec une grande *stabilité* donc sans aucun risque d'en perdre le contrôle mécanique, ce qui intéresse particulièrement les secteurs sensibles du nucléaire et de la chimie, où la dangerosité de la matière transportée impose de prendre en compte les risques inhérents aux chocs ou à la dissémination.

Ce problème aborde le principe de la lévitation acoustique de manière simplifiée.

Les vecteurs seront surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ( $\hat{e}$ ) et d'une flèche dans le cas général ( $\vec{a}$ ). Ainsi dans l'espace cartésien on notera  $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$ .

À l'exception de  $j$ , tel que  $j^2 = -1$ , les nombres complexes seront soulignés.

Dans tout le problème, **exprimer** signifie donner l'expression littérale et **calculer** signifie donner la valeur numérique avec deux chiffres significatifs.

### I. — La lévitation grâce à une onde sonore

Le dispositif de lévitation acoustique est présenté et modélisé sur la figure 1.

Un transducteur, de surface  $S = 10 \text{ cm}^2$ , est en vibration au voisinage de la hauteur  $h$  à la vitesse

$$\vec{u}_m(t) = U_m \sin(\omega t) \hat{e}_z$$

avec  $U_m = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Il génère une onde sonore de fréquence  $f = 20 \text{ kHz}$  supposée plane, harmonique, et progressive selon la verticale descendante. Cette onde est *totale*ment réfléchiée par une paroi fixe placée en  $z = 0$ . Le milieu de propagation est l'air, supposé homogène et compressible. Il est caractérisé au repos (en l'absence d'onde sonore) par une masse volumique  $\mu_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  uniforme. Les champs de température et pression sont eux aussi stationnaires ; la température  $T_0$  étant en outre uniforme alors que la pression est une fonction de  $z$  soit  $P_0 = P_0(z)$ .

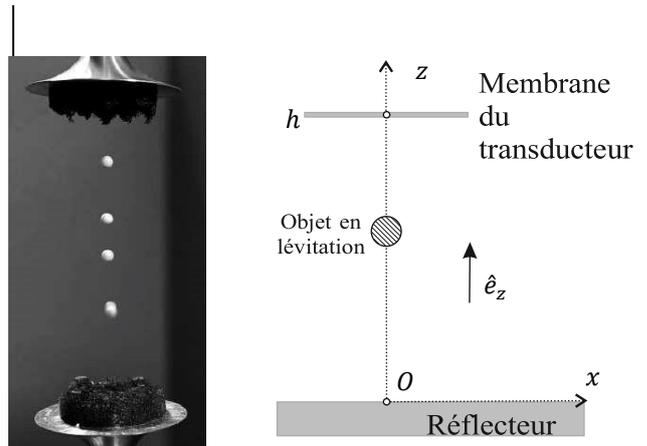


Figure 1 – À gauche : lévitation acoustique de particules de polystyrène expansé. À droite : schéma de principe du dispositif de lévitation acoustique.

On suppose que la propagation est unidimensionnelle, de célérité  $c = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le milieu. Dans l'approximation acoustique, les champs de pression, masse volumique, et vitesse sont alors décrits respectivement par :

$$\begin{cases} P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t) \\ \mu(z,t) = \mu_0 + \mu_1(z,t) \\ \vec{v}(z,t) = v_1(z,t) \hat{e}_z \end{cases}$$

<sup>1</sup>. D. Foresti, M. Nabavi, M. Klingauf, A. Ferrari and D. Poulikakos, 'Acoustophoretic contactless transport and handling of matter in air', *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 110 no. 31, Janvier 2013, 12549 - 12554

<sup>2</sup>. M. A. B. Andrade, N. Pérez, J. C. Adamowski, 'Particle manipulation by a non-resonant acoustic levitator', *Appl. Phys. Lett.*, 106, 014101, Janvier 2015

Les termes  $p_1$  et  $\mu_1$  sont perturbatifs : pour toutes les valeurs de  $t$  et de  $z$  concernées on a donc  $|p_1| \ll P_0$  et  $|\mu_1| \ll \mu_0$ . L'évolution du fluide mis en mouvement par l'onde sonore est supposée adiabatique et réversible. Le coefficient de compressibilité isentropique sera noté  $\chi_s$  et assimilé à une constante.

❑ 1 — Rappeler les hypothèses de l'approximation acoustique. Sauf mention contraire, on suppose ces hypothèses vérifiées par la suite.

❑ 2 — On considère une particule fluide, de volume  $d\tau$ , mise en mouvement par le passage de l'onde sonore. Montrer que, dans l'approximation acoustique, son accélération peut s'écrire  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .

❑ 3 — Ecrire, en projection sur  $\hat{e}_z$ , l'équation aux dérivées partielles obtenue en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide de volume  $d\tau$  et de masse  $\mu_0 d\tau$ . Que donne cette relation si la particule est au repos ? Compte-tenu de cette seconde relation, déterminer finalement une équation aux dérivées partielles reliant les seules grandeurs  $\mu_0$ ,  $v_1$  et  $p_1$ .

❑ 4 — Donner les expressions linéarisées des relations locales traduisant, d'une part la conservation de la masse, et d'autre part le caractère isentropique de l'évolution du fluide sous l'effet de l'onde acoustique.

❑ 5 — Montrer que le champ des vitesses  $v_1(z, t)$  vérifie une équation de propagation de la forme

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0$$

Quel est le nom de cette équation ? Exprimer  $c$  en fonction des paramètres pertinents.

❑ 6 — On note  $\lambda$  la longueur d'onde associée au phénomène propagatif décrit à la question précédente. On suppose que les transferts thermiques dans le milieu sont de type diffusif. On note  $\kappa = 3,0 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la conductivité thermique de l'air et  $c_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  sa capacité thermique massique à pression constante. Par un raisonnement en ordre de grandeur, montrer que l'hypothèse d'adiabaticité n'est valide que si la fréquence  $f$  de l'onde est inférieure à une valeur  $f_{\max}$  que l'on exprimera, en fonction de  $\kappa$ ,  $\mu_0$ ,  $c_p$  et  $c$ . Qu'en est-il dans le cadre de cette expérience ?

❑ 7 — On note  $z_m(t)$  la position de la membrane du transducteur au voisinage de  $h$ . Exprimer puis calculer l'amplitude  $Z_m$  de vibration de  $z_m(t)$ .

❑ 8 — On s'intéresse à l'onde sonore résultante entre le transducteur et le réflecteur. Justifier la condition aux limites

$$u_m(t) \approx v_1(h, t)$$

❑ 9 — Déterminer complètement la vitesse  $v_1(z, t)$  dans l'espace  $0 \leq z \leq h$  et exprimer son amplitude maximale  $V_1$  en fonction de  $U_m$ ,  $h$ ,  $\omega$  et  $c$ .

❑ 10 — Déterminer les positions spatiales des maxima de vitesse en fonction de  $\lambda$  et d'un entier  $n$ . Commenter ce résultat. Montrer que l'amplitude  $V_1$  des maxima diverge pour certaines pulsations  $\omega_n$ . En pratique, quels phénomènes limitent la valeur de  $V_1$  ?

❑ 11 — Exprimer la surpression  $p_1(z, t)$  associée à  $\vec{v}_1(z, t)$ .

On considère une bille, de rayon  $a \ll \lambda$  et donc assimilable à un volume élémentaire sans influence sur la propagation de l'onde acoustique. Déterminer la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression s'exerçant sur la bille, ainsi que sa moyenne temporelle  $\langle \vec{F} \rangle$ . Le modèle étudié jusqu'à présent permet-il d'interpréter la lévitation de cette bille ?

❑ 12 — On règle dorénavant la valeur de  $h$  de manière à obtenir  $V_1 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pourquoi n'est-il plus possible de se placer dans l'approximation acoustique ?

On pose maintenant :

$$\begin{cases} P(z, t) = P_0(z) + p_1(z, t) + p_2(z, t) \\ v(z, t) = v_1(z, t) + v_2(z, t) \end{cases}$$

où les termes d'indice 0 sont les grandeurs constantes au repos (en l'absence d'onde sonore), les termes d'indice 1 sont les solutions étudiées précédemment et les termes d'indice 2 sont des corrections d'ordre 2, résultant des termes non linéaires des équations aux dérivées partielles décrivant le phénomène.

□ 13 — On admet que la surpression  $p_2(z, t)$  est de la forme

$$p_2(z, t) = \frac{1}{4} \mu_0^\ell V_1^q \cos\left(\frac{2\omega z}{c}\right) + f(z) \cos(2\omega t)$$

où  $f(z)$  est une fonction dont il n'est pas nécessaire de connaître l'expression.

Déterminer les valeurs des entiers  $\ell$  et  $q$ . Déterminer la moyenne temporelle  $\langle F_z \rangle (z)$  de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la bille.

□ 14 — Montrer, sans les déterminer explicitement, qu'il existe des positions d'équilibre tant que la masse volumique  $\mu_b$  de la bille reste inférieure à une valeur  $\mu_{b,\max}$  dont on précisera l'expression. En vous appuyant sur une représentation graphique de la force moyenne  $\langle F_z \rangle (z)$ , discuter la stabilité des positions d'équilibre.

□ 15 — Calculer  $\mu_{b,\max}$  et proposer une estimation de la masse maximale  $m_{b,\max}$  d'une bille susceptible de léviter avec le dispositif présenté ici. Commenter les valeurs numériques.

□ 16 — Comme on le voit sur la figure 1 le dispositif permet de faire léviter plusieurs objets. Quelle est la distance qui les sépare ? Exprimer le nombre maximal de ces objets en fonction de  $\lambda$  et  $h$ .

□ 17 — On observe que les objets en lévitation dans ce dispositif ont un petit mouvement d'oscillation de pulsation  $\tilde{\omega}$  au voisinage de leurs positions d'équilibre. Déterminer l'expression de  $\tilde{\omega}$  en fonction des paramètres du problème.

---