ONDES DE SURFACE

(ENS - ULM - PC - 2017)

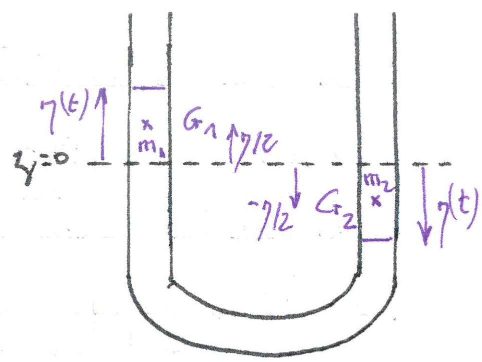
Q1. La situation d'équilibre du fluide est celle de l'égalité des altitudes des surfaces libres des tubes verticaux en $z=0$.
L'état initial avec un surcroît de masse d'eau dans le tube de gauche est un état hors équilibre. Le poids de cet excédent déplace tout le volume de fluide incompressible. La surface libre de gauche descend tandis que celle de droite monte. A gauche, l'altitude $z=0$ est dépassée par valeurs décroissantes sous l'effet de l'inertie. S'installe alors une oscillation de tout le volume, oscillation qui ne cesse pas puisqu'on néglige ici les frottements du fluide sur la paroi du tube.

Q2. Le liquide est supposé incompressible, donc de volume V constant. Il se "déplace" "en bloc".
Dans le tube vertical de gauche le champ de vitesse s'écrit

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\eta}(t)\,\vec{e}_z}$$

Q3. Avec ce qui précède, toutes les particules de fluide ont même vitesse.
Ainsi $\boxed{E_c = \frac{1}{2}\rho V \dot{\eta}^2}$

Q4. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie lorsque le liquide est à l'équilibre.



A l'instant t, il faut ajouter celle du tube de gauche dépassant de la hauteur η le niveau d'équilibre :

$$m_1 = \rho S \eta \quad ; \quad z(G_1) = \frac{\eta}{2}$$

et ôter celle du tube de droite rendu vide de liquide

$$m_2 = \rho S \eta \quad ; \quad z(G_2) = -\frac{\eta}{2}$$

$$\rightarrow E_p = m_1 g\, z(G_1) - m_2 g\, z(G_2) \rightarrow \boxed{E_p = \rho S g \eta^2}$$

Q5. En l'absence de phénomène dissipatif, l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\rho V \dot{\eta}^2 + \rho S g \eta^2 = \text{cte}$$

Ainsi $\frac{dE_m}{dt} = \rho V \ddot{\eta}\dot{\eta} + 2\rho S g \eta \dot{\eta} = 0 \rightarrow \boxed{\ddot{\eta} + \frac{2g}{L}\eta = 0}$

$$\boxed{\eta(t) = \eta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t\right)}$$

Q6 - Il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique de pulsation propre ω, $\omega^2 = \frac{2g}{L}$

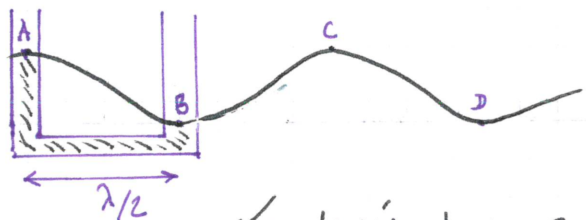
A.N : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$ $T = 2{,}01\ s$

Q7 - L'expérience semble réalisable.
Les oscillations seront amorties par le travail des forces de viscosité.
Les surfaces libres auront la forme de ménisques du fait de la tension superficielle.

Q8 - La dernière phrase de la citation de Newton suggère bien un phénomène périodique.
Le reste évoque un pendule de longueur $\frac{L}{2}$, sa pulsation d'oscillation vaut bien

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Q9 -



Pour de faibles oscillations, les tubes verticaux sont de hauteurs négligeables. $L \simeq \frac{\lambda}{2}$.

La durée pour que A passe au niveau A et B au niveau haut est $\frac{T}{2}$, ce qui correspond à une propagation de l'onde sur une longueur $\frac{\lambda}{2}$.

Ainsi $v = \frac{\lambda/2}{T/2} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\lambda}} \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda g}}$

expression conforme à la citation de Newton : $v \propto \sqrt{\lambda}$.

Q10 - Si la propagation est solution d'une équation de d'Alembert, la relation de dispersion s'écrit $k = \frac{\omega}{c}$ où c : célérité.
et c s'identifie à la vitesse de propagation v   Ainsi $k = \frac{\pi\omega}{\sqrt{\lambda g}}$ où $\lambda \underset{def}{=} \frac{2\pi}{k}$

$\Rightarrow k = \frac{\pi\omega}{\sqrt{2\pi g}}\sqrt{k} \Rightarrow \sqrt{k} = \sqrt{\frac{\pi}{2g}}\,\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2gk}{\pi}}}$

Q27 – Φ vérifie $\Delta\Phi = 0$ soit $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$

$-k^2 \times b f(z) \cos(\omega t - kx + \Psi) + f''(z) . b \cos(\omega t - kx + \Psi) = 0$

d'où $\boxed{f'' - k^2 f = 0}$

Solution $f(z) = \alpha e^{-kz} + \beta e^{kz}$ $k > 0$

$z \in \mathbb{R}^- \rightarrow \left|\lim_{z \to -\infty} f(z)\right| = \infty$ ce qui n'est pas physique. Posons $\alpha = 0$.

Condition limite : $f(0) = 1 \rightarrow \beta = 1 \rightarrow \boxed{f(z) = e^{kz}}$

Q28 – Pour une particule de fluide $v_z = \frac{Dz}{Dt}$ et $v_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$

A la surface $z = \eta \Rightarrow v_z = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\,\eta(x,t)$

D'où $-\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + v_x . \frac{\partial}{\partial x}\eta$ où $v_x = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=\eta}$.

$$\boxed{-\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\eta}{\partial x} . \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=\eta}}$$

Q29 – * $v_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ soit en ordre de grandeur (odg) : $v_z \simeq k\Phi$

* A la surface $v_z = \frac{\partial\eta}{\partial t} \xrightarrow{odg} v_z \simeq \omega\eta$

D'où $\Phi \simeq \frac{\omega\eta}{k}$

* $\frac{\partial\eta}{\partial t} \overset{odg}{\simeq} \omega\eta$
* $\frac{\partial\eta}{\partial x} \overset{odg}{\simeq} k\eta$
* $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=\eta} \overset{odg}{\simeq} k\Phi \simeq \omega\eta$

$$\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} . \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=\eta}}{\frac{\partial\eta}{\partial t}} \simeq \frac{k\omega\eta^2}{\omega\eta} = k\eta$$

D'où $\boxed{\frac{\partial\eta}{\partial t} \simeq -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=\eta}}$ si $k\eta \ll 1$

De plus $\Phi(z=\eta) \simeq \Phi(0) + \eta \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}(0)$ au 1er ordre

d'où $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} \simeq \frac{\partial\Phi}{\partial \eta} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}$

Q30 – $\frac{\partial\eta}{\partial t} = -a\omega \sin(\omega t - kx)$; $-\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = -kb\cos(\omega t - kx + \Psi)$

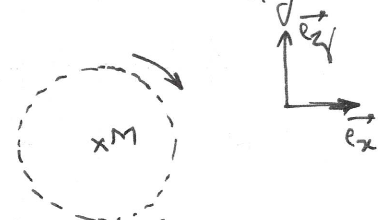
D'où $\boxed{\Psi = -\frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{b = \frac{a\omega}{k}}$

Q31. Par définition $\vec{v} = -\overrightarrow{grad}\,\phi$ où $\phi = \frac{a\omega}{k} e^{kz} \sin(\omega t - kx)$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + a\omega e^{kz} \cos(\omega t - kx) \\ 0 \\ - a\omega e^{kz} \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

On intègre par rapport au temps : $\begin{cases} x_p = \alpha + a e^{kz} \sin(\omega t - kx) \\ z_p = \beta + a e^{kz} \cos(\omega t - kx) \end{cases}$

On obtient les équations paramétriques d'un cercle de rayon ae^{kz} centré en $M(\alpha, z)$. On assimile α et β aux coordonnées x, y moyennes de x_p et y_p dans le temps



D'où $\begin{cases} x_p = x + a e^{kz} \sin(\omega t - kx) \\ z_p = z + a e^{kz} \cos(\omega t - kx) \end{cases}$

En eau profonde, $e^{kz} \to 0$. Il n'y a plus de vague. Le liquide est au repos.

Q32. $e_c = \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow \boxed{e_c = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 e^{2kz}}$

$$E_c = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda dx \int_{-\infty}^{\eta} \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 e^{2kz} dz = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 \left[\frac{1}{2k} e^{2kz}\right]_{-\infty}^{\eta}$$

$\Rightarrow \underline{E_c = \frac{\rho a^2\omega^2}{4k} e^{2k\eta}}$. Or $k\eta \ll 1 \Rightarrow \boxed{E_c = \langle E_c \rangle = \frac{\rho a^2 \omega^2}{4k}}$

Q33. $\boxed{e_p = \rho g z}$

. Comme à la question précédente on définit $E_g = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda dx \int_{-\infty}^{\eta} e_p(z)\,dz - E_{g0}$

où $E_{g0} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda dx \int_{-\infty}^{0} e_p(z)\,dz$

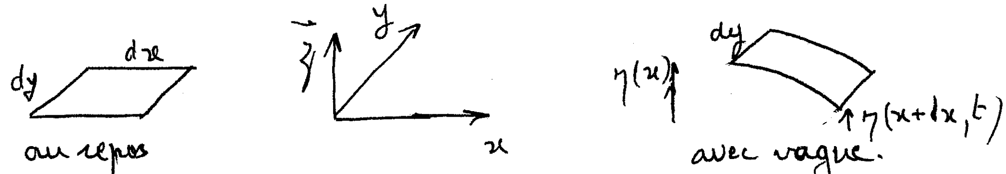
$\rightarrow E_g = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda dx \int_0^{\eta(x,t)} \rho g z\,dz = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{1}{2}\rho g \eta^2(x,t)\,dx$, où $\eta(x,t) = a e^{kz}\cos(\omega t - kx)$ d'après Q31.

On a toujours $k\eta \ll 1$

D'où $E_g = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{1}{2}\rho g a^2 \cos^2(\omega t - kx)\,dx = \frac{\rho g a^2}{4} = E_g$

Moyennée dans le temps on retrouve $\boxed{\langle E_g \rangle = \frac{\rho g a^2}{4}}$

Q34.



Variation d'aire élémentaire : $dS = dy\left[\sqrt{dx^2 + (\eta(x)-\eta(x+dx))^2} - dx\right]$

$$\boxed{dS = dx\,dy\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2} - 1\right]}$$

Q35. $|k\eta| \ll 1 \Rightarrow \frac{\eta}{\lambda} \ll 1$ d'où $\frac{\partial\eta}{\partial x} \ll 1$

Un développement limité de dS donne $dS \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 dx\,dy$.

d'où $\underline{dS \simeq \frac{1}{2}k^2a^2\sin^2(\omega t - kx)\,.\,dx\,dy.}$

Ainsi $dE_{cap} = \gamma\, dS$ que l'on intègre sur une longueur unitaire selon (Oy), et une longueur λ selon (Ox).

$E_{cap} = \frac{1}{1}\int_{y=0}^{1} dy \int_{x=0}^{\lambda} \frac{1}{\lambda}.\gamma.\frac{1}{2}k^2a^2\sin^2(\omega t - kx)\,dx = \frac{1}{4}\gamma k^2a^2$, à moyenne dans le temps.

D'où $\boxed{\langle E_{cap}\rangle = \frac{1}{4}\gamma k^2 a^2}$

Q36. $\langle E_c\rangle = \langle E_g\rangle + \langle E_{cap}\rangle \Rightarrow \rho\frac{a^2\omega^2}{4k} = \rho\frac{ga^2}{4} + \frac{\gamma k^2a^2}{4}$

$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3}$ Relation de dispersion.

Q37. $\vec{P} = \rho\int_{-\infty}^{\eta} a\omega e^{kz}\cos(\omega t - kx)\,dz\,\vec{e_x} = \frac{\rho a\omega}{k}e^{k\eta}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e_x}$

$\langle\vec{P}\rangle_{t,esp} = \langle \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{\rho a\omega}{k}e^{k\eta}\cos(\omega t-kx)\,dx\rangle_t\,\vec{e_x}$; $e^{k\eta} \simeq 1 + k\eta$ au 1^{er} ordre.

$\langle\vec{P}\rangle_{t,esp} = \langle \frac{\rho a\omega}{\lambda k}\left\{\int_0^{\lambda}\cos(\omega t-kx)\,dx + \int_0^{\lambda}k\eta\cos(\omega t-kx)\,dx\right.\rangle_t\,\vec{e_x}$

Or $\eta(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$ d'après Q31, en $z=0$.

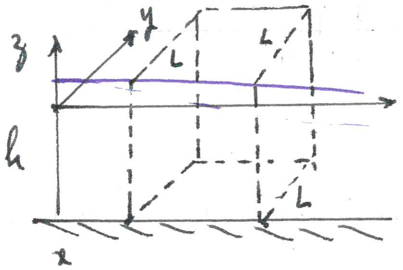
Donc au 2^e ordre en η

$\langle\vec{P}\rangle_{t,esp} = \langle 0 + \frac{\rho a^2\omega}{\lambda}\int_0^{\lambda}\cos^2(\omega t-kx)\,dx\rangle_t\,\vec{e_x} = \frac{\rho a^2\omega}{2}\,\vec{e_x}$.

Par définition $c_\varphi = \frac{\omega}{k}$, d'où $\boxed{\langle\vec{P}\rangle = \frac{\rho a^2 c_\varphi k}{2}\,\vec{e_x}}$

Q38 -

Q39 - En régime stationnaire, l'énergie entrant à l'abscisse x dans un système compris entre x et $x+dx$, est égale à celle qui sort à l'abscisse $x+dx$.



$$E(x) L . c(x) = E(x+dx) . L . c(x+dx)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dEc}{dx} = 0}$$

Q40 - * $c = \sqrt{g h(x)}$ pour une bathymétrie lentement variable

$\rightarrow c = \sqrt{g(h_0 - \beta x)}$ puisque $\tan \beta \simeq \beta \ll 1$ au 1er ordre.

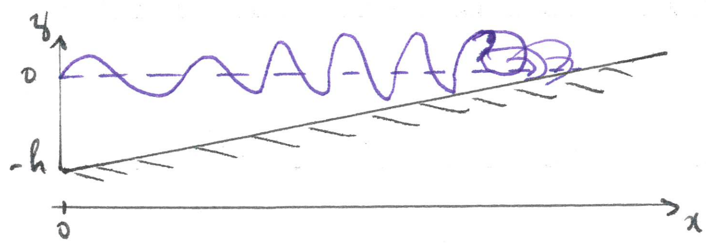
* L'équation de d'Alembert amène la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$

soit $\lambda = \frac{c}{f} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\sqrt{g(h_0 - \beta x)}}{f}}$ la longueur d'onde décroît en avançant sur la plage.

Q41 - D'après Q39, $(Ec)(x) = cte$. soit $a^2 \sqrt{h} = cte$

Donc $\boxed{a \propto (h)^{-1/4} = (h_0 - \beta x)^{-1/4}}$

Q42 - Comme h décroît, l'hypothèse $\eta \ll h$ ne sera plus valable.
Le modèle adopté, basé sur l'équation linéaire de d'Alembert sera mis en défaut. Apparition des phénomènes non linéaires comme le déferlement des vagues, écoulement turbulent.



Q43 - Dans le cas général, la phase s'écrit $\omega t - \vec{k}\vec{r}$.

* $x < 0$: $\vec{k_0} = k_0 (\cos \alpha_0 . \vec{e_x} + \sin \alpha_0 . \vec{e_y})$

* $y > 0$: $\vec{k_1} = k_{1x} \vec{e_x} + k_{1y} \vec{e_y}$

Conservation de la phase en $x=0$: $\omega t - k_0 \cancel{x}\cos\alpha_0 - k_0 y \sin\alpha_0 = \omega t - k_{1x}\cancel{x} - k_{1y} y$

$\Rightarrow \underline{k_{1y} = k_0 \sin\alpha_0}$

Or $\quad k_0 = \dfrac{\omega}{c_0} \quad ; \; k_1 = \dfrac{\omega}{c_1} \quad \Rightarrow \boxed{k_0 c_0 = k_1 c_1} \Rightarrow k_0\sqrt{h_0} = k_1\sqrt{h_1}$

$k_{1y} = k_1 \sin\alpha_1 \quad$ d'où $\quad \boxed{\sin\alpha_1 = \sqrt{\dfrac{h_1}{h_0}}\sin\alpha_0}$

Cette relation est analogue à la loi de la réfraction de Snell-Descartes.

Q44. D'après la question précédente $k(x).\sin\alpha(x) = k_0 \sin\alpha_0 = K$ est une grandeur conservée au cours de la propagation.

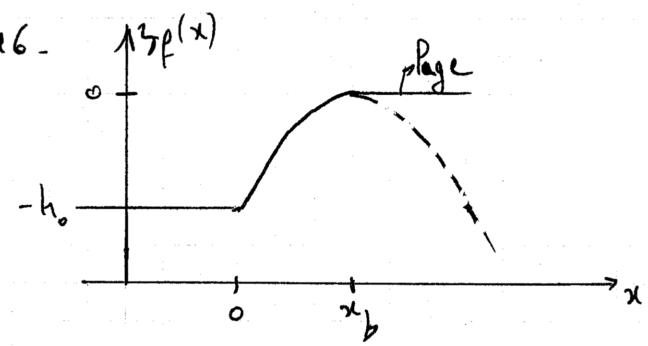
Q45 - Soit $d\vec{l} = dy_R\,\vec{e}_y + dx\,\vec{e}_x$ un déplacement élémentaire sur la courbe tangente à $\vec{k}$.

$\vec{k} \wedge d\vec{l} \overset{\text{def}}{=} \vec{0} \quad \Rightarrow \quad k_x\,dy_R - k_y\,dx = 0 \quad$ où $\vec{k} = \begin{vmatrix} k\cos\alpha \\ k\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dy_R}{dx} = \dfrac{k\sin\alpha}{k\cos\alpha}}$

$\dfrac{dy_R}{dx} = \dfrac{K}{k\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{dy_R}{dx} = \dfrac{K}{\sqrt{k^2-K^2}}}$

Q46 -



D'après Q43 : $k^2 = k_0^2 \dfrac{h_0}{h(x)}$

$K = k_0 \sin\alpha_0$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dy_R}{dx} = \dfrac{\sin\alpha_0}{\sqrt{\left(\dfrac{x_b}{x_b-x}\right)^2 - \sin^2\alpha_0}}}$

Q47 - $d\xi = -\dfrac{1}{x_b}dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy_R}{dx} = -\dfrac{1}{x_b}\dfrac{dy_R}{d\xi} = -\dfrac{d\eta}{d\xi}$.

Soit $-\dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{\sin\alpha_0}{\sqrt{\dfrac{1}{\xi^2} - \sin^2\alpha_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{d\eta}{d\xi} = -\dfrac{\xi\sin\alpha_0}{\sqrt{1-(\xi\sin\alpha_0)^2}}}$

Q48 - Posons $u = \xi\sin\alpha_0 \quad ; \quad du = d\xi.\sin\alpha_0$

$\rightarrow \sin\alpha_0 \dfrac{d\eta}{du} = -\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$. Séparons les variables : $\sin\alpha_0 . d\eta = d\left(\sqrt{1-u^2}\right)$

On intègre entre $\eta_0 = \dfrac{y_R(x=0)}{x_b} = \dfrac{y_0}{x_b}$ et $\eta = \dfrac{y_R(x)}{x_b}$

D'où $\sin\alpha_0\left(\dfrac{y_R(x)-y_0}{x_b}\right) = \sqrt{1-\sin^2\alpha_0\left(1-\dfrac{x}{x_b}\right)^2} - \cos\alpha_0$

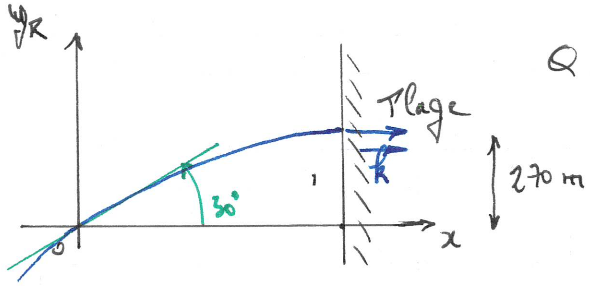
$$y_R - y_0 = \sqrt{\frac{x_b^2}{\sin^2\alpha_0} - (x_b^2 - x)^2} - x_b \cotan \alpha_0$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_b - x)^2 + (y_R - y_0 + x_b \cotan \alpha_0)^2 = \frac{x_b^2}{\sin^2 \alpha_0}}$$

Équation d'un cercle de centre $C(x_b \,;\, y_0 - x_b \cotan \alpha_0)$

de rayon $R = \frac{x_b}{\sin \alpha_0} > x_b$

Q49 –

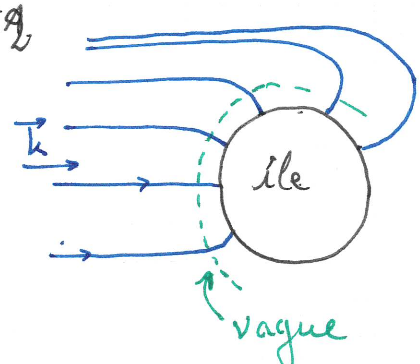


Q N.B. : $x_b = 1000$ m $\rightarrow R = 2000$ m

$y(C) = -x_b \cotan \alpha_0 = -1730$ m

Q50 – $y_R(x)$ admettant le vecteur d'onde comme vecteur directeur, le front d'onde des vagues est parallèle à la plage quand elles y accèdent.

Q51



Q51 On observe bien sur la photo satellite qu'à l'approche de la plage, les vagues y déferlent parallèlement au rivage.

Q52 – Si on n'a plus l'hypothèse $R \gg \lambda$, il faut tenir compte de la diffraction des vagues par l'île.