

ETUDE D'UN ÉCOULEMENT DANS UN TUYAU CYLINDRIQUE

(CCP-PSI - 2003)

1. En l'absence de champ de pesanteur (négligé), il y a invariance du système par rotation d'angle θ quelconque autour de l'axe (oz) donc $\vec{v}$ est indépendant de θ .

2. Equation locale de conservation de la masse: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$
 Pour un fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$), cette equation devient $\text{div} \vec{v} = 0$

$$\text{soit } \text{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 ; \text{ or } v_r = v_\theta = 0$$

$$\text{d'où } \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ donc } \vec{v} = v_z \vec{e}_z \text{ est indépendant de } z.$$

3. Écoulement stationnaire: $\vec{v}$ est indépendant de t .

4. Projection selon $\vec{e}_z$: $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r v')$

Soit: $\frac{\partial P}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r v')$ est une fonction de r seulement

La projection selon r donne $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ donc P est indépendant de r .

Par ailleurs, on a montré que les champs sont indépendants de θ (invariance par rotation) et de t (écoulement stationnaire).
 Donc P ne dépend a priori que de z .

5. De plus $\frac{\partial P}{\partial z}$ est indépendant de z , donc $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P(L) - P(0)}{L} = \frac{P_L - P_0}{L}$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r v') = \frac{P_L - P_0}{\eta L} \quad \text{Donc } P(z) = \frac{P_L - P_0}{L} z + P_0$$

6. On intègre: $\frac{d}{dr}(r v') = r \frac{P_L - P_0}{\eta L} \rightarrow r v' = \frac{\eta^2}{2} \frac{P_L - P_0}{\eta L} + \text{cte}$

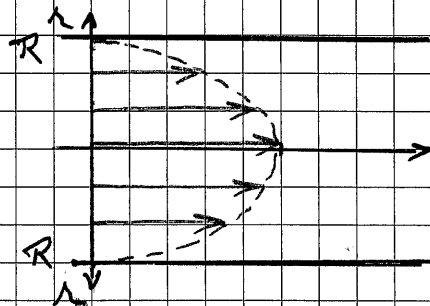
$$v' = \frac{\eta}{2} \frac{P_L - P_0}{\eta L} + \frac{\text{cte}}{r} \rightarrow v(r) = \frac{\eta^2}{4} \frac{P_L - P_0}{\eta L} + \text{cte} \ln(r) + \text{cte}'$$

Or $v(r)$ reste fini lorsque r tend vers 0 donc $\text{cte} = 0$.

Condition limite d'adhérence à la paroi: $v(R) = 0 \Rightarrow \text{cte}' = -\frac{R^2}{4} \frac{P_L - P_0}{\eta L}$

$$\rightarrow v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} (R^2 - r^2)$$

$$v_{\max} = v(0) = \frac{R^2}{4\eta} \frac{P_0 - P_L}{L}$$



7. Bilan des forces :

* Force pressante en $z=0$: $\vec{F}_0 = \pi R^2 P_0 \vec{e}_z$

* " " " $z=L$: $\vec{F}_L = -\pi R^2 P_L \vec{e}_z$

* " " latérale: $\vec{F}_{lat} = \int_{\text{surface latérale}} P(r) r d\theta dz (-\vec{e}_r)$

$$= - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L P(r) r d\theta dz (\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y)$$

$$= \vec{0}$$

* Force de cisaillement visqueux $\vec{F}_\eta = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \vec{e}_z$

(bien orientée dans le sens opposé à l'écoulement car $v(r)$ s'annule au bord du tuyau.)

8. Loi de la quantité de mouvement en écoulement stationnaire :

$\vec{0} = \vec{F}_0 + \vec{F}_L + \vec{F}_\eta$ soit, projetée: $\pi R^2 (P_0 - P_L) + 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = 0$

d'où $\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2L\eta} (P_L - P_0) = kr$ en posant $k = \frac{P_L - P_0}{2L\eta}$

On intègre: $v(r) = k \frac{r^2}{2} + cte$

Condition limite: $v(R) = 0 \Rightarrow cte = -k \frac{R^2}{2}$

D'où $v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{P_0 - P_L}{L} (R^2 - r^2)$

9. * Par définition $Q = \int_{\text{section tuyau}} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{P_0 - P_L}{4\eta L} (R^2 - r^2) r dr d\theta$

$Q = \frac{P_0 - P_L}{8\eta L} R^4$ Posons $K = \frac{R^4}{8\eta L}$

* Par définition $v_{\text{moy}} = \frac{Q}{\pi R^2} \rightarrow v_{\text{moy}} = \frac{R^2}{8\eta L} (P_0 - P_L) = \frac{1}{2} v_{\text{max}}$

10. $R_{\text{hy}} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

L'analogie électrique de Q est l'intensité du courant I
 $P_0 - P_L$ " la différence de potentiel U .

On en déduit que R_{hy} est l'analogie de la résistance électrique

$R_{\text{el}} = \frac{U}{I}$

11 - On remarque que R_{hy} dépend de la puissance quatrième de R
 alors que $R_{el} = \frac{L}{\sigma \pi R^2}$ dépend du carré de R

Cela est dû au fait que la vitesse du fluide n'est pas uniforme
 alors que le modèle amenant à cette expression de la
 résistance électrique suppose un courant électrique uniforme

12 - d'écoulement laminaire est un écoulement à faible nombre
 de Reynolds ($Re < 2000$)

$$Re = \frac{\rho v_{moy} 2R}{\eta} = \frac{\rho v_{max} R}{\eta} < 2000 \rightarrow R < \frac{\eta}{\rho v_{max}} \cdot 2000$$

$$\rightarrow \underline{R < 2 \text{ cm}}$$

13 a) Ces deux cylindres sont en série car traversés par le même
 débit.

$$\text{Ainsi } Q = \frac{P_0 - P_1}{R_{hy1}} = \frac{P_2 - P_1}{R_{hy2}} \rightarrow P_0 - P_2 = P_0 - P_1 + P_1 - P_2$$

$$P_0 - P_2 = (R_{hy1} + R_{hy2}) Q \rightarrow \underline{R_{hy} = R_{hy1} + R_{hy2}}$$

Relation analogue à la résistance électrique équivalente à deux
 résistances en série.

$$b) \frac{P_0 - P_1}{R_{hy1}} = \frac{P_2 - P_1}{R_{hy2}} \rightarrow \underline{P_1 = P_0 - \frac{R_{hy1}}{R_{hy1} + R_{hy2}} (P_0 - P_2)}$$

NB: On retrouve la formule analogue à celle du pont diviseur
 de tension.

$$14 - P_0 - P_1 = R_{hy1} Q_1 = R_{hy2} Q_2$$

Par analogie avec deux résistances en parallèle: $R_{hy} = \frac{R_{hy1} R_{hy2}}{R_{hy1} + R_{hy2}}$

Par analogie avec le pont diviseur de courant:

$$\underline{Q_1 = Q \frac{R_{hy2}}{R_{hy1} + R_{hy2}}}$$

$$\frac{1}{R_{hy}} = \frac{1}{R_{hy1}} + \frac{1}{R_{hy2}}$$

$$15 - P_{Joule} = R I^2$$

$$\text{soit par analogie } \underline{P_{visc} = R_{hy} Q^2}$$

16. $N_g = 2^{p-1}$

17. $r_p = r_1 h^{p-1}$; $l_p = l_1 h^{p-1}$

18. $V_p = \pi r_p^2 l_p = V_1 h^{3p-3}$

$V_{pt} = N V_p = V_1 (2h^3)^{p-1} \rightarrow V_{pt} = V_1 X^{p-1}$

$V_t = \sum_{p=1}^n V_1 X^{p-1} \xrightarrow{\text{série géométrique}} V = V_1 \frac{1-X^n}{1-X}$

19. Les bronchioles d'une même génération sont en parallèle

$R_p = \frac{8\eta l_p}{\pi r_p^4} = R_1 \frac{h^{p-1}}{h^{4(p-1)}} \rightarrow R_p = \frac{R_1}{h^{3(p-1)}}$

$\frac{1}{R_{tp}} = N(p) \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} (2h^3)^{p-1} = \frac{1}{R_1} X^{p-1} \rightarrow R_{tp} = \frac{R_1}{X^{p-1}}$

* les générations successives sont série

$R_t = \sum_{p=1}^n \frac{R_1}{X^{p-1}} = R_1 \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{X}\right)^{p-1} = R_1 \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{X}\right)^p$

$R_t = R_1 \frac{1 - (1/X)^n}{1 - 1/X}$

20. V_t diverge si $X > 1 \rightarrow 2h^3 > 1 \rightarrow h > h_c = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 0,79$

R_t diverge si $1/X > 1 \rightarrow h < h_c$

21. $P_{th} = R_{ty} Q_1^2 = R_t Q_1^2 = R_1 Q_1^2 \frac{1 - (1/X)^n}{1 - 1/X} = P_{th}$

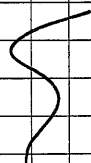
22. Second principe: $dS = \delta S_e + \delta S_c = \frac{-P_{th} dt}{T} + \sigma dt$

À régime stationnaire $dS = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{P_{th}}{T}$

23. $\sigma_v = \frac{\sigma}{V} = \frac{P_{th}}{TV} = \frac{R_1 Q_1^2}{TV_1} \left(\frac{1 - (1/X)^n}{1 - 1/X} \right) \left(\frac{1-X}{1-X^n} \right) \rightarrow \sigma_v = \frac{R_1 Q_1^2}{TV_1} X^{1-n}$

σ_v diverge si $X < 1$ donc si $h < h_c = 0,79$

Pour un homme où $h = 0,85$, l'entropie créée ne diverge pas



PRINCIPE DES CAPTEURS PNEUMATIQUES

(CCINP - PL - 2024)

Q1. $dm(t) = \mu(x,t) \cdot A(x,t) dx$

$dm(t+dt) = \mu(x,t+dt) \cdot A(x,t+dt) dx$

Q2. $\delta m_e = Q_{m,entrant}(x,t) dt = \mu(x,t) A(x,t) v(x,t) dt$

$\delta m_s = Q_{m,sortant}(x+dx,t) dt = \mu(x+dx,t) A(x+dx,t) v(x+dx,t) dt$

Q3. Bilan de masse entre t et $t+dt$.

$dm(t+dt) - dm(t) = \delta m_e - \delta m_s$

$(\mu(x,t+dt) A(x,t+dt) - \mu(x,t) A(x,t)) dx = (\mu(x,t) A(x,t) v(x,t) - \mu(x+dx,t) A(x+dx,t) v(x+dx,t)) dt$

$\frac{\partial}{\partial t} (\mu A) dt dx = - \frac{\partial}{\partial x} (\mu A v) dx dt$

d'où $\frac{\partial}{\partial t} (\mu A) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu A v) = 0$ (1)

Q5. Hypothèses : * Effets de la viscosité négligés.
* Résultant négligé.

$\mu(x,t) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = - \text{grad} P(x,t)$

où $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: accélération locale

$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$: — convective —

Q6. Linéarisation : On ne conserve que les termes d'ordre 1

$(\mu_0 + \mu_1) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{v \frac{\partial}{\partial x} \vec{v}}_{\text{l'ordre 2}} = - \frac{\partial}{\partial x} (P_0 + p_1)$ où $P_0 = \text{cte}$

$\mu_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: l'ordre 2

Projection selon $\vec{u}_x \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}$ (2)

Q7. $D = \frac{1}{A_0 + a_1} \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_s$ où $\left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_s \approx \frac{\Delta A}{\Delta p} = \frac{A_0 + a_1 - A_0}{P_0 + p_1 - P_0} = \frac{a_1}{p_1}$

$D \approx \frac{1}{A_0 \left(1 + \frac{a_1}{A_0} \right)} \frac{a_1}{p_1} \approx \frac{1}{A_0} \left(1 - \frac{a_1}{A_0} \right) \frac{a_1}{p_1}$ Soit au 1^{er} ordre $D = \frac{a_1}{A_0 p_1}$

$\Rightarrow a_1 = D A_0 p_1$ (3)

Q8 - $\chi_s = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s$ où $\frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{\mu_1}{p_1}$

$\chi_s \approx \frac{1}{\mu_0 (1 + \frac{\mu_1}{\mu_0})} \frac{\mu_1}{p_1} \approx \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \frac{\mu_1}{p_1}$ soit au 1^{er} ordre $\chi_s \approx \frac{\mu_1}{\mu_0 p_1}$

$\Rightarrow \mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1 \quad (4)$

Q9 - Au 1^{er} ordre (1) s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 a_1 + \mu_1 A_0) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu_0 A_0 v) = 0$

A l'aide (3) et (4)

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 A_0 D p_1 + \mu_0 A_0 \chi_s p_1) + \frac{\partial}{\partial x} \mu_0 A_0 v = 0 \Rightarrow (D + \chi_s) \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

Q10 - La relation précédente s'écrit $\frac{\partial v}{\partial x} = -(D + \chi_s) \frac{\partial p_1}{\partial t}$

d'où $\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = -(D + \chi_s) \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

et après (4) $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}$ d'où $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$

Théorème de Schwarz : $\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$

d'où $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 (D + \chi_s)} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0$ Equation de D'Alembert où $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 (D + \chi_s)}}$

Q11 - $c = 2,5 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$

Q12 - (5) : $(D + \chi_s) \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x}$

Poseons $u = t - \frac{x}{c}$

$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial u}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial u}$

$\Rightarrow c(D + \chi_s) \frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial u}$ qu'on intègre (la constante d'intégration est choisie nulle car non progressive).

$c(D + \chi_s) p = v$

Par définition $Q = A(x, t) v(t - \frac{x}{c}) \Rightarrow Q = A c (D + \chi_s) p$

On pose $Y = A c (D + \chi_s) = \frac{A}{\mu_0 c}$ soit à l'ordre 0 pour A : $Y = \frac{A_0}{\mu_0 c}$

A.N. : $Y = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^2 \text{ c}$

Q13 - Continuité de la pression : $p_e(0, t) + p_i(0, t) = p_A(0, t)$

$f(t) + g(t) = h(t)$

* Continuité du débit volumique: $Q_e(0,t) + Q_r(0,t) = Q_t(0,t)$

ou $Q_e(0,t) = Y_1 p_e(0,t)$; $Q_r(0,t) = -Y_1 p_r(0,t)$; $Q_t(0,t) = Y_2 p_t(0,t)$

$$\Rightarrow \underline{Y_1 f(t) - Y_1 g(t) = Y_2 h(t)}$$

on obtient le système $\begin{cases} f+g=h \\ Y_1(f-g) = Y_2 h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1(f+g) = Y_1 h & (1) \\ Y_1(f-g) = Y_2 h & (2) \end{cases}$

(1)+(2): $2Y_1 f = (Y_1 + Y_2) h \Rightarrow \underline{h = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} f}$

$\frac{(1)}{Y_1} - \frac{(2)}{Y_1} : f+g - \frac{Y_1}{Y_2}(f-g) = 0 \Rightarrow \underline{g = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_2 + Y_1} f}$

donc $\underline{r = \frac{g}{f}|_{x=0} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}}$

Pas d'onde réfléchie i.e. $r=0 \Rightarrow \underline{Y_1 = Y_2}$ par exemple en raccourbant des tuyaux identiques (adaptation d'impédance)

Q14 - Par définition: $\beta = \vec{\Pi} \cdot A_0 \vec{u}_x$
 $= p A_0 v = p Q = Y p^2 \Rightarrow \underline{\beta = Y p^2}$

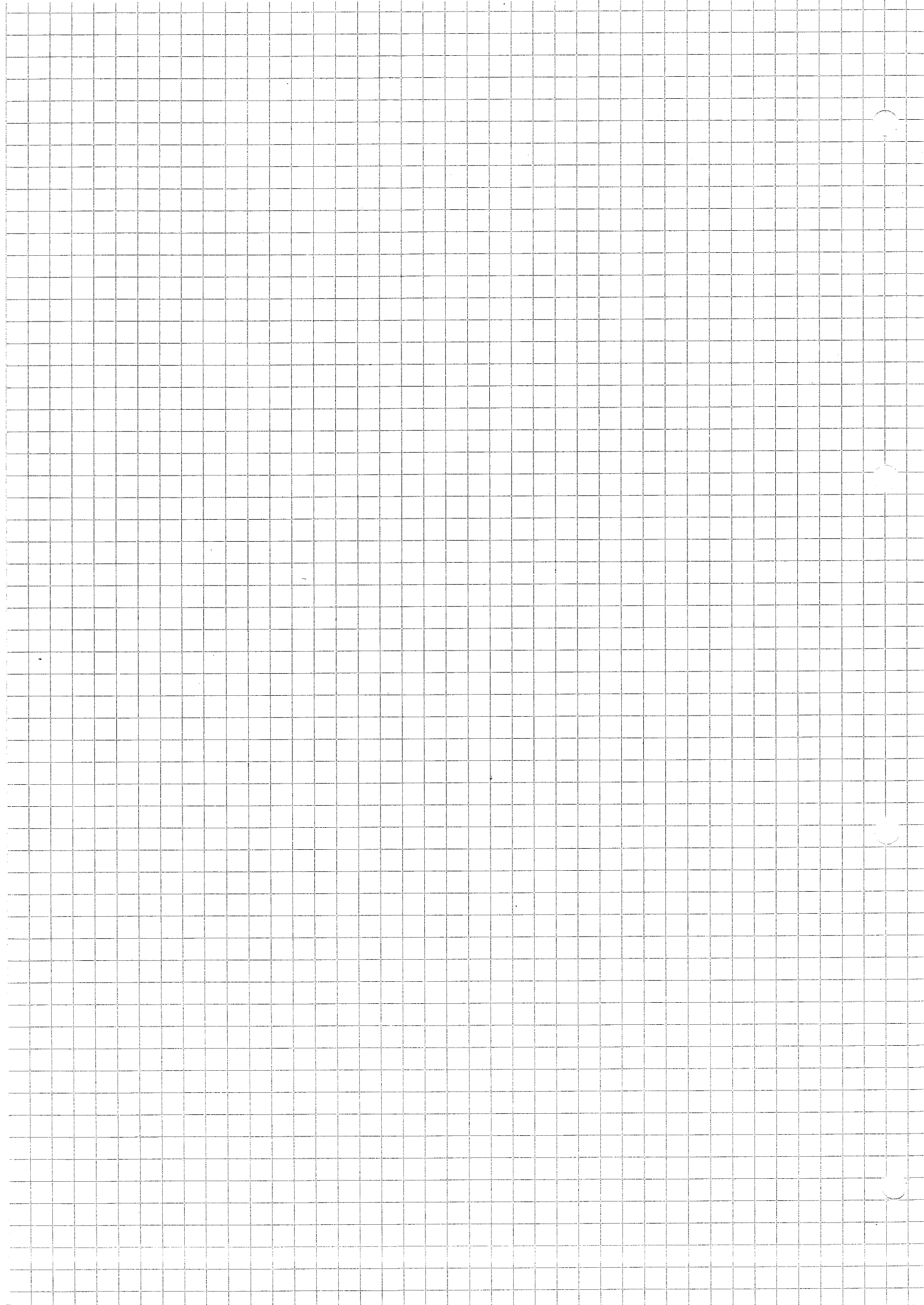
* $\begin{cases} \beta_i = Y_1 p_e^2(0,t) = Y_1 f^2(0) \\ \beta_r = Y_1 p_r^2(0,t) = Y_1 g^2(0) \end{cases} \Rightarrow \underline{R = \left(\frac{f}{g} \right)^2 \Big|_{x=0} = r^2 = \left(\frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \right)^2}$

* A.N: $Y_1 = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{Pa}^{-1}$ (cf Q12)

Par un tuyau métallique $D=0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$

$Y_2 = A_0 \sqrt{\frac{\chi_s}{\rho_0}} = 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{Pa}^{-1}$

$\Rightarrow R = 2,0 \cdot 10^{-2}$ donc l'onde est totalement transmise.



PHYSIQUE : LEVITATION ACOUSTIQUE

(Mines - Ponts - PSI 2020)

1. Approximation acoustique: $|p_1| \ll P_0$; $|\mu_1| \ll \mu_0$; $|v| \ll c$

où v : vitesse acoustique
 c : célérité des ondes sonores.

2. $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ où $\vec{v}(z, t) = v(z, t) \vec{e}_z$ car onde longitudinale
 $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v \frac{\partial v}{\partial z}$

Considérons une onde plane harmonique: $\vec{v} = v_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z$

où $k = \frac{\omega}{c}$ dans l'air non dispersif.

$\frac{\partial v}{\partial t} = j\omega v$; $v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\omega}{c} v^2 \rightarrow \frac{|\partial v / \partial t|}{|v \frac{\partial v}{\partial z}|} = \frac{c}{v} \gg 1$ par hypothèse

Donc $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

3. * Equations d'Euler: $\mu(z, t) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } P + \mu_0 \vec{g}$

Projection selon $\vec{e}_z$: $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu_0 g$

* Fluide au repos: $v = 0$; $P = P_0$; $\mu = \mu_0 \rightarrow 0 = -\frac{\partial P_0}{\partial z} - \mu_0 g$

Donc $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P_0}{\partial z} - \frac{\partial p_1}{\partial z} - \mu_0 g$

$\Rightarrow \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z}$ (a)

4. * Conservation de la masse linéarisée: $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}$ (b)

* Coefficient de compressibilité isothermique: $\chi_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s$

soit, une fois linéarisée: $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$ (c)

5. (c) dans (b): $\mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}$ (d)

$\frac{\partial (d)}{\partial z}$: $\mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}$

$\mu_0 \chi_s \frac{\partial (a)}{\partial t}$: $-\mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial z} = \chi_s \mu_0^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$

Le théorème de Schwartz affirme $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t}$

En sommant membre à membre les équations précédentes, on obtient

$$0 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 v_1}{\partial t}$$

On pose $c = \frac{1}{\mu_0 \chi_s}$

Equation de D'Alembert.

6. L'hypothèse d'adiabaticité s'applique si la durée typique de diffusion thermique est longue devant la période de l'onde

$\rightarrow \tau_{diff} \gg T$ où $\tau_{diff} \approx \frac{\lambda^2}{D}$ où $D = \frac{k}{\rho c_p}$ diffusivité thermique

$$\frac{\lambda^2 \rho c_p}{k} \gg T \rightarrow$$

$$\frac{c^2}{f^2} \frac{\rho c_p}{k} \gg \frac{1}{f}$$

d'où $f \ll \frac{\rho c_p c^2}{k} = f_{max}$ $f_{max} = 4,6 \text{ GHz}$

condition amplement vérifiée ici où $f = 20 \text{ kHz}$.

7. $z_m(t) \vec{e}_y = \vec{u}(t) = U_m \sin(\omega t) \vec{e}_y$ d'où $z_m(t) = -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega t)$

$$Z_m = \frac{U_m}{\omega}$$

$$Z_m = 0,30 \mu\text{m}$$

8. La continuité de la vitesse au voisinage du transducteur s'impose en mécanique des fluides en l'absence de formation d'une "bulle de vide" et pour une membrane non poreuse.

9. Afin de satisfaire aux conditions limites sur le transducteur et sur le réflecteur on considère une solution en onde stationnaire

$$v_1(z,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(\frac{\omega}{c} z + \psi\right)$$

* Continuité de la vitesse en $z=0$: $v_1(0,t) = 0 = A \cos(\omega t + \varphi) \cos \psi$

Poseons $\psi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow v_1(z,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$

* Continuité de la vitesse en $z=h$: $v_1(h,t) = u_m = U_m \sin(\omega t)$

$\Rightarrow A \cos(\omega t + \varphi) \sin\left(\frac{\omega}{c} h\right) = U_m \sin(\omega t) \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$A = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)}$$

d'où $v_1(z,t) = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$

$$V_n = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)}$$

10 - * Ventres de vitesse pour $\frac{\omega}{c} z_n = (n + \frac{1}{2})\pi \quad n \in \mathbb{N}$
 où $\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \underline{z_n = \frac{\lambda}{2} (n + \frac{1}{2})}$

On retrouve le résultat classique $z_{n+1} - z_n = \frac{\lambda}{2}$.

* pour $\omega = \omega_p = p \pi \frac{c}{h}$, V_1 diverge
 La viscosité de l'air dissipe de l'énergie et empêche V_1 de diverger.
 On peut aussi sortir de l'approximation acoustique ce qui fait apparaître des phénomènes non linéaires.

11 - * (a) : $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial z} \rightarrow \mu_0 \omega \frac{U_m}{\sin(\frac{\omega}{c} h)} \cos(\omega t) \sin(\frac{\omega}{c} z) = - \frac{\partial p_1}{\partial z}$

$\rightarrow p_1(z, t) = \mu_0 c \frac{U_m}{\sin(\frac{\omega}{c} h)} \cos(\omega t) \cos(\frac{\omega}{c} z)$

* $\vec{F} = - \frac{4}{3} \pi a^3 \text{grad } P$

$\vec{F} = - \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\partial}{\partial z} (P_0 + p_1) \vec{e}_z = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\mu_0 g + \mu_0 \frac{\omega U_m}{\sin(\frac{\omega}{c} h)} \cos(\omega t) \sin(\frac{\omega}{c} z) \right) \vec{e}_z$

$\langle \vec{F} \rangle = \mu_0 g \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{e}_z$ Il s'agit de la "Poussée d'Archimède"
 A priori $\mu_0 > \mu_0$ donc le modèle

ne permet pas d'expliquer la lévitation.

12 - Ici on ne suppose plus $V_1 \ll c$, on ne se place donc plus dans le cadre de l'approximation acoustique.

13 - * Analyse dimensionnelle : $[p] = [\mu_0^q V_1^q]$

or $[p] = M L^{-1} T^{-2}$; $[\mu_0] = M L^{-3}$; $[V_1] = L T^{-1}$

d'où $L^1 M T^{-2} = M^l L^{-3l+q} T^{-q} \rightarrow \underline{l=1 ; q=2}$

* $\vec{F} = - \frac{4}{3} \pi a^3 \text{grad} (P_0 + p_1 + p_2) = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\mu_0 g - \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) \vec{e}_z$

$\vec{F} = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\mu_0 g - \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\omega}{2c} \mu_0 V_1^2 \sin(\frac{2\omega z}{c}) - f''(z) \cos(2\omega t) \right) \vec{e}_z$

d'où $\langle \vec{F} \rangle = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\mu_0 g + \frac{\omega}{2c} \mu_0 V_1^2 \sin(\frac{2\omega z}{c}) \right) \vec{e}_z$

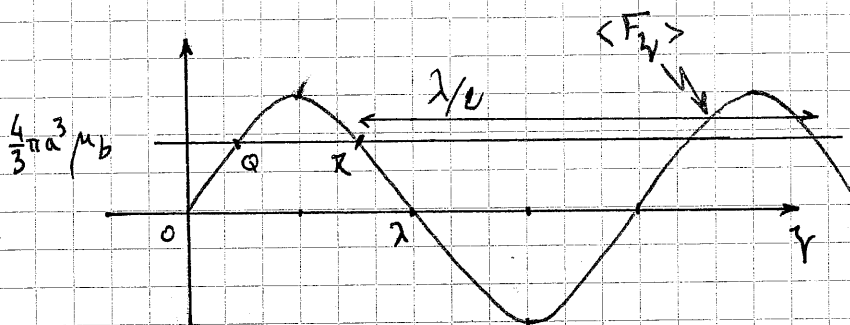
14 - Théorème de la résultante dynamique appliqué à la bille à l'équilibre dans le référentiel galiléen du laboratoire :



$$\langle \vec{F} \rangle + \mu_b g \frac{4}{3} \pi a^3 = 0 \text{ soit selon } \vec{z}_y : (\mu_0 - \mu_b)g + \frac{\mu_0 V_1^2 \omega}{2c} \sin\left(\frac{2\omega}{c} z_y\right) = 0$$

$$(\mu_b - \mu_0) \frac{2cg}{\mu_0 V_1^2 \omega} = \sin\left(\frac{2\omega}{c} z_y\right) \leq 1, \text{ égalité pour } \mu_b = \mu_{b\max}.$$

$$\mu_{b\max} = \left(1 + \frac{V_1^2 \omega}{2cg}\right) \mu_0$$



* En Q, un léger accroissement de z_y (perturbation positive) engendre un accroissement de $\langle F_{zy} \rangle$: INSTABLE

* En R, une perturbation positive engendre une diminution de $\langle F_{zy} \rangle$ donc la bille restera emportée par son poids : STABLE

$$15 - \mu_{b\max} = \left(1 + \frac{2500 \cdot \pi \cdot 10^{-3}}{340 \cdot 10}\right) 1,2 \rightarrow \mu_{b\max} = 5,5 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$$

$$* a \leq \lambda = \frac{c}{f} = 1,7 \text{ cm} \quad \text{Prendons } a_{\max} \approx 0,1 \text{ cm} \quad \mu_{b\max} \approx 55 \text{ kg m}^{-3}$$

$$M_{\max} = \frac{4}{3} \pi a_{\max}^3 \mu_{b\max} = 0,23 \text{ g} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ce dispositif reste destiné} \\ \text{à la lévitation en laboratoire} \\ \text{et non industrielle.} \end{array} \right.$$

16 - Les positions d'équilibre stables sont distantes de $\frac{\lambda}{2}$ donc les objets en lévitation stable aussi.

Comme V_1 est dit de grande valeur $\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right) \approx 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c} h = \left(p + \frac{1}{2}\right) \pi$
 soit $h = \frac{\lambda}{2} \left(p + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow p = \frac{2h}{\lambda}$ le nombre de positions d'équilibre stables.

17 - On considère les petits mouvements au voisinage d'un équilibre : $z(t) = z_{eq} + \varepsilon(t)$
 la loi de la dynamique s'écrit alors

$$m \ddot{\varepsilon} = -mg + m \frac{\mu_0 V_1^2 \omega}{2c \mu_b} \sin\left(\frac{2\omega}{c} z_{eq} + \frac{2\omega}{c} \varepsilon\right)$$

$$\text{ou } \varepsilon \ll z_{eq}$$

Une fois linéarisé on trouve $\ddot{\varepsilon} - \frac{\mu_0 V_1^2 \omega^2}{c^2 \mu_b} \varepsilon \cos\left(\frac{2\omega}{c} z_{eq}\right) = 0$

qui est une équation d'oscillateur harmonique pour $\cos\left(\frac{2\omega}{c} z_{eq}\right) < 0$
 de pulsation propre $\tilde{\omega} = \left(-\frac{\mu_0 V_1^2 \omega^2}{c^2 \mu_b} \cos\left(\frac{2\omega}{c} z_{eq}\right)\right)^{1/2}$

$$\text{soit } \tilde{\omega} = \left(\frac{\mu_0 V_1^2 \omega^2}{c^2 \mu_b} \left(1 - \left(\frac{2c \mu_b g}{\mu_0 V_1^2 \omega}\right)^2\right)^{1/2}\right)^{1/2}$$

?