

**Recommandations :**

- Pour choisir l'ordre dans lequel vous traiterez les problèmes lisez le sujet en entier au préalable.
- Les résultats littéraux et numériques doivent être encadrés.
- Un résultat numérique sans unité est considéré faux.
- Les correcteurs (effaceurs, peinture, ruban, stylo à friction) sont interdits.
- La rédaction se fait en langue française respectant syntaxe, grammaire et orthographe.
- Une relecture finale attentive, 15 minutes avant la fin de l'épreuve est indispensable.

**Pénalité :** Un défaut de qualité de la copie (présentation, écriture, orthographe, syntaxe) pourra faire l'objet d'une pénalité de 1 ou 2 points sur la note finale.

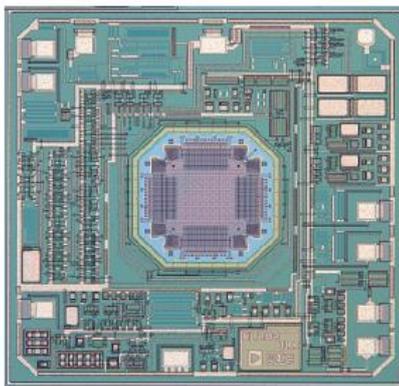
*Problème Pour Tous*

**Fonctionnement et technologie de l'accéléromètre**

La miniaturisation, la fiabilité et le faible coût des capteurs à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) permettent de les intégrer dans de nombreux dispositifs électroniques embarqués. La plupart des accéléromètres à MEMS permettent de mesurer les accélérations suivant deux axes. En aéronautique, les accéléromètres sont utilisés en tant que tels dans les avions soumis à de fortes contraintes, avions de chasse ou de voltige, et couplés à des gyromètres ils entrent dans la composition de centrales à inertie.

**A – Étude mécanique du capteur**

On limite l'étude à la modélisation du fonctionnement d'un accéléromètre à un seul axe. Un accéléromètre est modélisé par un système masse-ressorts amorti, dont le schéma de principe est représenté sur la **figure 1**. On suppose que les déplacements ne s'effectuent que selon l'axe  $Ox$  horizontal. L'accéléromètre se compose d'une masse mobile  $m$ , assimilée à un point matériel  $C$ , astreinte à se déplacer sans frottements secs selon l'axe horizontal  $Ox$ . Le boîtier rigide de l'accéléromètre, de longueur  $L$  selon l'axe  $Ox$ , de centre  $B$  se déplace dans le référentiel d'étude terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen et on note  $\vec{a}$  son accélération dans ce référentiel. Son accélération s'écrit  $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_x$ .



Photographie d'un accéléromètre deux axes : le capteur MEMS est situé au centre (source Analog Devices)

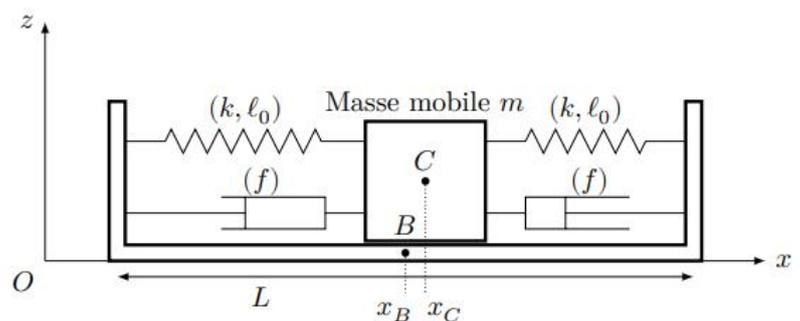


Schéma de principe du fonctionnement mécanique de l'accéléromètre suivant un axe

**Figure 1 : accéléromètre MEMS**

On note à un instant  $t$  quelconque,  $x_C$  la position de la masse mobile en mouvement,  $x_B$  la position du centre du boîtier et  $X = x_C - x_B$  la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier. Lorsque le boîtier de l'accéléromètre est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme, la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier vérifie  $X = 0$ . Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse mobile quitte la position définie précédemment.

La masse mobile est soumise :

- aux forces de rappel  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  exercées par deux ressorts identiques, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  ;
- à des forces de frottement visqueux dont la résultante est proportionnelle à la vitesse relative de la masse mobile par rapport au boîtier  $\vec{F}_f = -2f\vec{v}_r$  où  $f$  est le coefficient de frottement visqueux ;
- au poids  $\vec{P}$
- à la réaction du boîtier  $\vec{R}$

### A.1) Mise en équation

- a) Exprimer les forces de rappels des ressorts en fonction de  $k$ ,  $X$  et  $\vec{e}_x$
- b) Exprimer la vitesse relative  $\vec{v}_r$  la masse mobile par rapport au boîtier.
- c) Montrer que, lorsque le boîtier subit une accélération  $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_x$ , l'équation différentielle vérifiée par l'élongation  $X$  s'écrit :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = -a$$

avec  $\omega_0$  et  $Q$  deux constantes que l'on exprimera en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $f$ .

### A.2) Étude de la réponse harmonique

On recherche maintenant les conditions pour lesquelles l'élongation  $X$  est directement proportionnelle à l'accélération  $a$  du boîtier. Pour cela, on étudie la réponse du capteur en régime harmonique établi.

- a) La grandeur d'entrée du capteur étant l'accélération  $a(t) = a_m \cos(\omega t)$ , sous quelle forme mathématique doit-on rechercher la grandeur de sortie  $X(t)$  ? Justifier.
- b) Établir la relation entre l'amplitude complexe de l'élongation  $\underline{X}_m$  et celle de l'accélération  $\underline{a}_m$ .
- c) Après avoir étudié le comportement asymptotique de  $\frac{\underline{X}_m}{\underline{a}_m / \omega_0^2}$ , montrer qu'il existe un domaine de fréquences, que l'on précisera, pour lequel on peut considérer que l'élongation  $X$  est directement proportionnelle à l'accélération  $a$  du boîtier. On précisera l'expression du coefficient de proportionnalité.

Pour la suite du problème, on considère que le domaine de fréquences dans lequel le capteur de l'accéléromètre est utilisé est tel que la relation précédente soit vérifiée.

La fréquence typique de résonance mécanique du capteur d'un accéléromètre à MEMS est de l'ordre de 5,5 kHz et son facteur de qualité est voisin de 5.

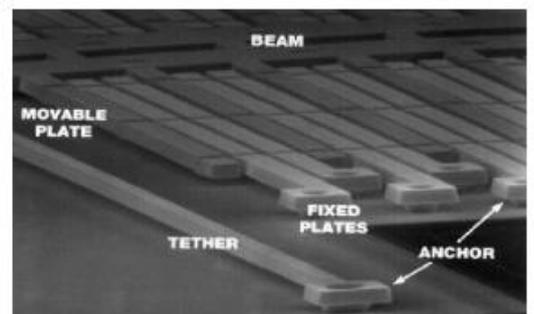
- d) Déterminer l'expression du rapport  $\frac{\underline{X}_m}{\underline{a}_m / \omega_0^2}$  en fonction de  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $Q$ .
- e) Définir le phénomène de résonance observé ici et déterminer l'expression de la fréquence  $f_r$  à laquelle se produit un phénomène de résonance. Commenter.
- f) Déterminer la valeur numérique de l'amplitude finale du déplacement de la masse mobile pour une accélération constante de « 1g », correspondant à l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre. Commenter le résultat.

## B – Étude de la détection par une méthode électrostatique

On s'intéresse dans cette partie au système de détection du déplacement  $X$  de la masse mobile de l'accéléromètre pour cela on utilise un condensateur à écartement variable dont les électrodes successives sont liées alternativement à la masse mobile et au boîtier

### B.1) Condensateur unique

Une première méthode, dont le principe est représenté sur la figure 3, consiste à mesurer la capacité d'un condensateur dont



10 μm

Figure 2 : Détail de la microstructure

une électrode, liée à la masse mobile, fait face à une électrode fixe liée au boîtier de l'accéléromètre.

Le déplacement de la masse mobile modifie la distance entre les deux électrodes et par voie de conséquence la capacité du condensateur.

On applique une différence de potentiel  $U$  entre les deux électrodes, Les deux électrodes sont assimilées à deux plans infinis parallèles séparés d'une distance  $e + X$ .

On donne la capacité  $C$  du condensateur ainsi formé :

$$C = C_0 \frac{e}{e + X}$$

où  $C_0$  est la capacité du condensateur pour  $X = 0$ .

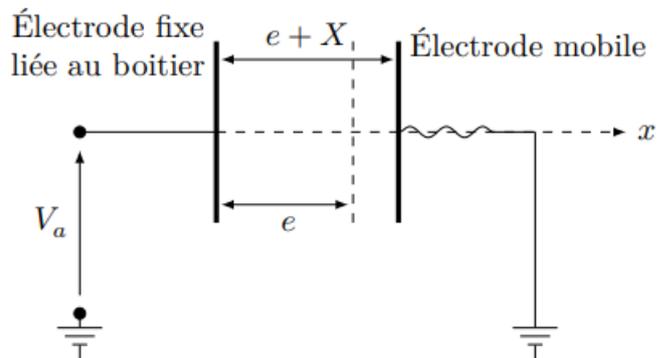


Figure 3

a) Rappeler l'expression de l'énergie électrostatique potentielle emmagasinée par le condensateur, en fonction de  $C$  et  $U$ , puis en fonction de,  $X$  et  $U$  et des constantes du système.

b) En déduire l'expression de la force électrostatique dérivant de cette énergie.

Les caractéristiques typiques d'un accéléromètre à MEMS sont  $C_0 = 0,1 \text{ pF}$ ,  $e = 1 \mu\text{m}$ ,  $U = 1 \text{ V}$  et la masse mobile est de  $1 \mu\text{g}$ .

c) Pour  $X = 0$ , donner l'ordre de grandeur de la force électrostatique s'exerçant sur l'électrode liée à la masse mobile.

d) Discuter la faisabilité de réaliser une mesure capacitive du déplacement de la masse mobile d'un accéléromètre à MEMS prévu pour mesurer des accélérations de «  $1g$  » ( $a = g$ ).

## B.2) Condensateur double différentiel

Dans les accéléromètres à MEMS, la méthode de mesure consiste à déterminer le potentiel électrostatique  $V$  de l'électrode liée à la masse mobile. Le schéma de principe de la méthode de mesure est représenté **figure 4**. Une seconde électrode fixe, liée au boîtier, est placée symétriquement par rapport à  $X = 0$ . La première électrode fixe est portée au potentiel  $V_a$ , la seconde au potentiel  $-V_a$ . L'électrode mobile, qui reste isolée et globalement neutre, sert alors de sonde de mesure du potentiel  $V$  qui est fonction du déplacement  $X$  de l'électrode mobile entre les deux électrodes fixes liées au boîtier.

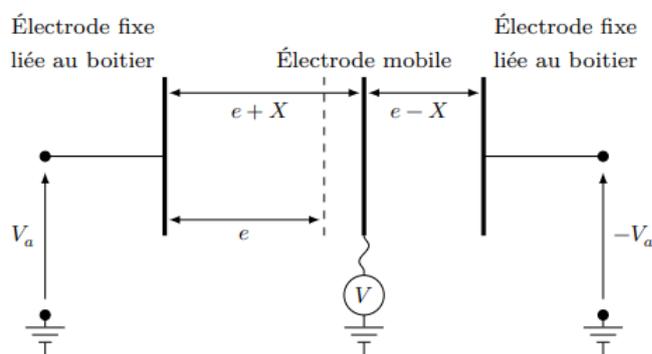


Figure 4

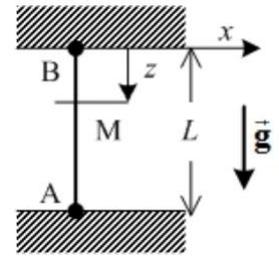
Dans cette configuration, le potentiel  $V$  de l'électrode mobile s'écrit  $V = -V_a \frac{X}{e}$ .

a) En utilisant l'expression établie en B.1b, calculer la résultante des forces électrostatiques s'exerçant sur l'électrode mobile.

b) Conclure sur les avantages de cette méthode de mesure.

**A – Vibration d’une corde fixée à ses deux extrémités**

Une corde de masse linéique  $\mu = \frac{m_T}{L}$  est verticale et fixée à ses deux extrémités A et B. L’axe des z est orienté vers le bas et l’origine est en B qui coïncide avec O. L’axe Ox est horizontal dans le plan de figure. La tension de la corde au point A est T(A) est très grande devant le poids de la corde :  $T(A) \gg m_T.g$ . La position d’un point M de la corde est repérée par sa cote z dans le référentiel galiléen lié à B.



Corde tendue et fixée à ses extrémités

**Corde à l’équilibre**

1 – On appelle  $T(M)$  la tension au point M qu’exerce la corde aval (située sous le point M). Exprimer  $T(M)$  en fonction de  $T(A)$ ,  $m_T.g$  et  $\mu g z$  puis la simplifier en tenant compte des ordres de grandeurs. On considère que  $T(M)$  ne sera pratiquement pas modifiée par la vibration ultérieure de la corde.

**Corde vibrante**

2 - La corde vibre et le point M, de cote z, se déplace transversalement. Ce déplacement est noté  $x(z,t)$ . On note  $\theta(z,t)$  l’angle que fait localement la corde avec l’axe vertical. Déterminer l’équation des ondes suivies par la fonction  $x(z,t)$  en négligeant les termes du deuxième ordre en  $\theta$  (approximation des petits mouvement).

Exprimer la célérité c des ondes en fonction de  $T(A)$  et de la masse linéique  $\mu$ . Calculer c pour  $\mu = 1,0.10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$  et  $T(A) = 1,0 \text{ N}$ .

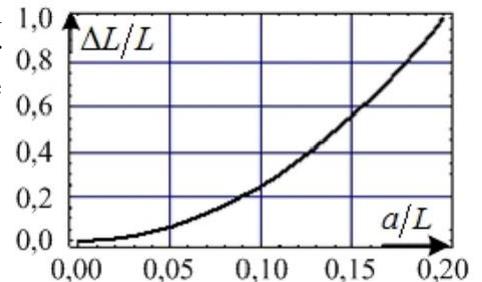
3 – A l’instant initial, la forme de la corde est donnée par  $x(z, 0) = a \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$  où a est une constante positive. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer la fonction d’onde stationnaire  $x(z,t)=X(z)A(t)$ .

4 – A l’instant initial, la corde est maintenant excitée selon deux modes propres :

$$x(z, 0) = a \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) + b \sin\left(4\pi \frac{z}{L}\right)$$

où a et b sont des constantes positives. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer avec le minimum de calculs la nouvelle fonction d’onde  $x(z,t)$ .

5 – La figure ci-contre représente l’allongement relatif de la corde en fonction de l’amplitude initiale de la déformation. Commentez ce résultat, par exemple en discutant l’hypothèse implicite que la masse linéique ne changeait pas au cours du mouvement.

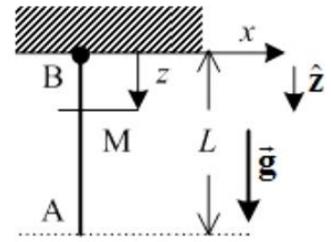


## B – Vibration de la corde fixée à une extrémité

Désormais, l'extrémité B est fixe, l'extrémité A est libre.

### A l'équilibre

6 – La corde est en équilibre. Montrer que la tension de la corde au point M est donnée par  $T(z) = \mu g(L - z)$



### Corde vibrante

7 – La corde vibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément  $dz$  de la corde à la cote  $z$ , montrer que la fonction d'onde vérifie l'équation [1] suivante :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g \frac{\partial x}{\partial z}$$

8 – Que devient l'équation d'onde si l'on tient compte de la force de frottement visqueux  $\vec{df} = -\alpha \frac{\partial x}{\partial t} \vec{e}_x dz$  agissant sur l'élément de corde  $dz$ ,  $\alpha > 0$  étant la constante de frottement ?

9 – On cherche une solution à l'équation d'onde au voisinage du point de fixation ( $z \ll L$ ). Simplifier l'équation d'onde et montrer qu'une onde sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et d'amplitude complexe  $\underline{x}(z, t) = \underline{x}_0 e^{j(\omega t - kz)}$  où ( $j^2 = -1$ ) peut se propager (i.e.  $k$  est une constante réelle) que pour une certaine valeur  $\alpha_0$  de la constante de frottement, que l'on exprimera en fonction de  $\mu$ ,  $g$  et  $L$ .

10 – On néglige maintenant le terme de frottement et on cherche une solution de l'équation de la question 7 dans la région  $z \ll L$  sous la forme  $\underline{x}(z, t) = \underline{a} e^{j(\omega t - kz)}$  avec  $\underline{k} = k_1 + jk_2$  complexe ( $k_1$  et  $k_2$  étant réels). Exprimer  $k_2$ . En déduire que l'amplitude de l'onde augmente pendant la propagation.

11 – Etablir l'expression de  $k_1^2$  en fonction de  $\omega$ . Justifier que la corde se comporte comme un filtre passe haut, et tracer  $k_1(\omega)$ .

## OSCILLATEURS ET MODES PROPRES

Tout objet physique, comme une corde vibrante, un pont, un bâtiment ou encore une molécule possède un certain nombre, parfois infini, de modes de vibration, appelés modes propres, qui dépendent de sa structure, de ses constituants ainsi que des conditions aux limites qui lui sont imposées. Le mouvement le plus général d'un tel système est une superposition de modes propres. Chacun de ces modes peut vibrer indépendamment des autres, c'est-à-dire que l'excitation du système dans un mode donné ne provoquera pas l'excitation des autres modes. Ainsi, le système pourra être considéré comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants. Si le système est soumis à une excitation externe, il peut entrer en résonance à chacune des fréquences propres associées aux différents modes propres.

### 1 – Modes propres de deux oscillateurs couplés

On étudie le système suivant représenté figure 1. Deux masses ponctuelles identiques  $M_1$  et  $M_2$ , de masse  $m = 100$  g, sont reliées d'un côté à deux parois fixes par deux ressorts identiques de raideur  $k$  et entre elles par un ressort de couplage de raideur  $k'$ . L'axe  $Ox$  est horizontal et la distance entre les parois fixes est telle qu'à l'équilibre les ressorts ont une longueur correspondant à leur longueur à vide  $\ell_0$ . Les masses sont assujetties à glisser sans frottement le long de l'axe  $Ox$ . On note  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre.

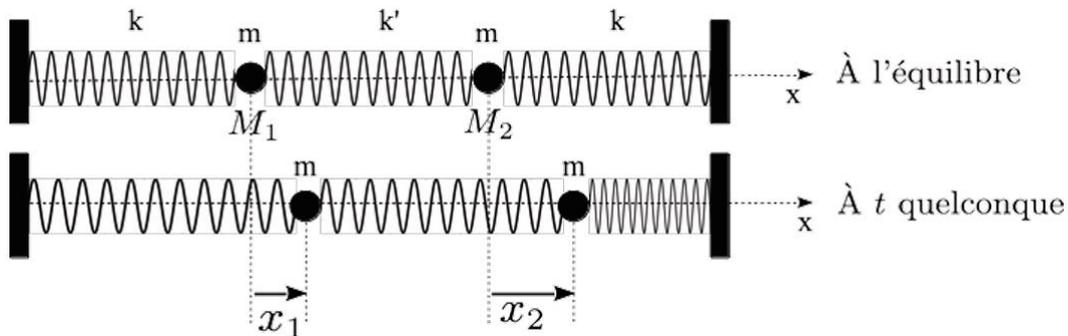


Figure 1

**Q1** – Exprimer la force  $\vec{F}'_1$  exercée par le ressort de raideur  $k'$  sur la masse  $M_1$  en fonction de  $k'$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $\vec{u}_x$ .

**Q2** – Ecrire de même, la force  $\vec{F}'_2$  exercée par le ressort de raideur  $k'$  sur la masse  $M_2$ .

**Q3** – Montrer que les déplacements  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  qui décrivent le mouvement des masses sont solutions du système d'équations couplées :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k + k'}{m} x_1 &= \frac{k'}{m} x_2 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k + k'}{m} x_2 &= \frac{k'}{m} x_1 \end{aligned}$$

**Q4** – On effectue le changement de variables :  $s = x_1 + x_2$  et  $d = x_1 - x_2$ . Ecrire les deux équations différentielles satisfaites par  $s$  et  $d$ . Commenter.

**Q5** – Donner la forme générale des solutions en  $(s, d)$ . On fera en particulier apparaître deux pulsations caractéristiques  $\Omega_s$  et  $\Omega_a > \Omega_s$  dont on donnera les expressions en fonction de  $m$ ,  $k$  et  $k'$ . On ne cherchera pas à exprimer les constantes d'intégration figurant dans les expressions de  $s(t)$  et  $d(t)$ .

$\Omega_s$  et  $\Omega_a$  sont appelées **pulsations propres** du système des deux oscillateurs couplés.

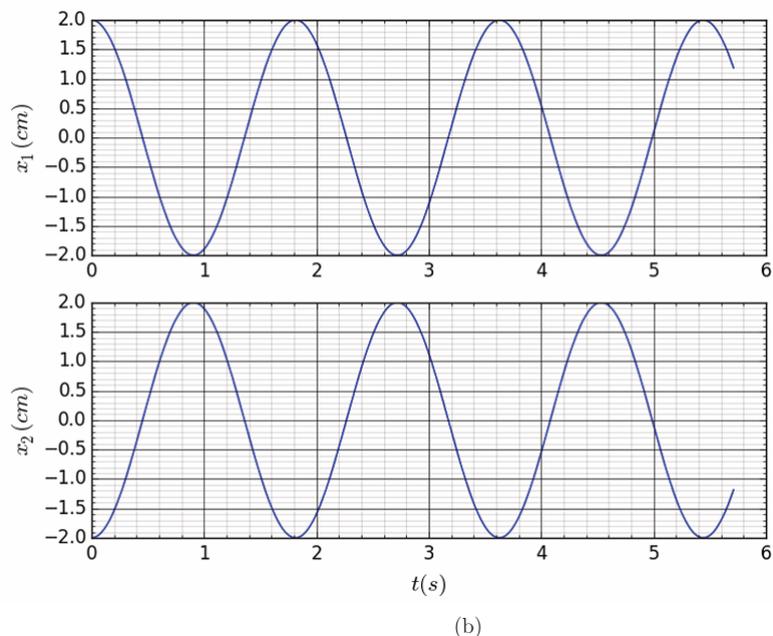
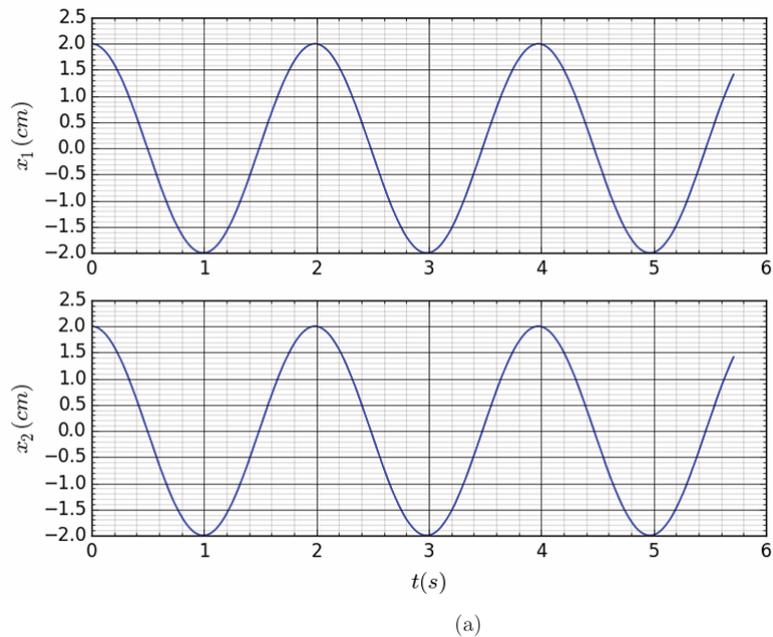
**Q6** – En déduire les expressions générales des déplacements  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .

**Q7** – On choisit les conditions initiales symétriques pour  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = x_0 \\ \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_2(0) = v_0 \end{aligned}$$

Expliciter  $s(t)$  et  $d(t)$ . Pour plus de commodité, on cherchera ces fonctions sous la forme générale  $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  avec  $\omega$ ,  $A$  et  $B$  à déterminer.

- Q8** – En déduire  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ . Le mouvement correspondant est appelé **mode symétrique**.  
 Décrire dans ce cas qualitativement le mouvement relatif des deux masses. Commenter le fait que  $\Omega_s$  ne dépende pas de  $k'$ .
- Q9** – Proposer des conditions initiales permettant d'exciter uniquement le mode de pulsation propre  $\Omega_a$ , appelé **mode antisymétrique**. Décrire qualitativement le mouvement des deux masses dans ce mode.
- Q10** – Les figures 2a et 2b représentent les chronogrammes des positions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour chacun des deux modes. A quel mode correspond chacune de ces figures ? On justifiera succinctement la réponse.
- Q11** – Déterminer entièrement les conditions initiales correspondant à chaque situation décrite par ces chronogrammes.
- Q12** – Calculer en utilisant les chronogrammes, les valeurs numériques des pulsations  $\Omega_s$  et  $\Omega_a$  puis de  $k$  et de  $k'$ .



**Figure 2**

## 2 – Modes de vibration d'une chaîne d'atomes

Nous allons dans cette partie augmenter le nombre d'oscillateurs couplés et envisager une chaîne unidimensionnelle de masses reliées par des ressorts. Les ondes acoustiques dans les solides ou le comportement thermique des solides cristallins peuvent être décrits en utilisant un modèle simple de milieu

déformable constitué d'un assemblage microscopique à 3 dimensions de type masses-ressorts. On exploite dans ce qui suit un modèle simplifié, à 1 dimension : on représente le solide cristallin par une chaîne linéaire d'atomes identiques de masse  $m$ , alignés sur l'axe  $Ox$ . A l'équilibre, ils sont séparés par une distance  $a$  et l'atome  $n$  se trouve à l'abscisse  $x_n=na$ . Une perturbation longitudinale se propageant selon l'axe  $Ox$  modifie la position des atomes, l'atome  $n$  étant déplacé, à  $t$ , d'une quantité  $u_n(t)$  telle que  $|u_n| \ll a$  (voir figure 3). On suppose que dans la chaîne unidimensionnelle, l'atome  $n$  subit uniquement l'action de ses deux plus proches voisins, les atomes  $(n-1)$  et  $(n+1)$ . Si les déplacements sont de faible amplitude, on peut modéliser l'interaction entre deux atomes voisins par une force de rappel élastique correspondant à un ressort de raideur  $\alpha$ .

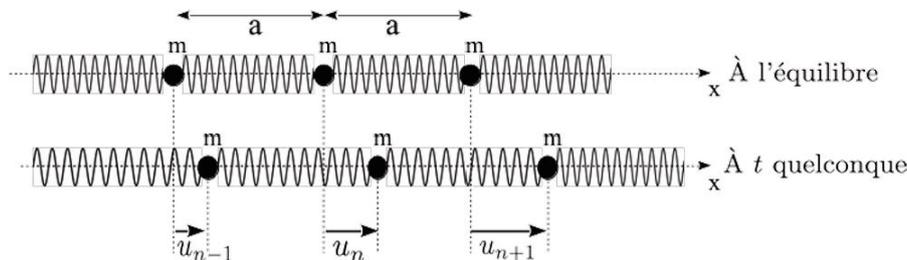


Figure 3

## 2.1 – Chaîne supposée infinie

**Q13** – Par application du principe fondamental de la dynamique à l'atome  $n$ , montrer que :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \frac{2\alpha}{m} u_n = \frac{\alpha}{m} u_{n+1} + \frac{\alpha}{m} u_{n-1}$$

**Q14** – On veut montrer qu'une onde élastique longitudinale de pulsation  $\omega$  de vecteur d'onde  $k$  peut se propager le long de la chaîne, en induisant un déplacement longitudinal de l'atome  $n$  sous la forme :

$$\underline{u}_n = A e^{i(kx_n - \omega t)}$$

où  $A$  est une constante, indépendante de  $n$  et de  $t$ . Qualifier cette onde.

**Q15** – Etablir la relation de dispersion reliant  $k$  et  $\omega$ .

On pourra utiliser la relation trigonométrie  $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

**Q16** – Montrer qu'on peut limiter l'étude de la relation de dispersion à des valeurs de  $k$  dans l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{a}\right]$ , c'est-à-dire  $ka \in [0; \pi]$ . Tracer le graphe de  $\omega$  en fonction de  $ka$  pour  $ka \in [0; \pi]$ .

**Q17** – Montrer qu'il existe une pulsation maximale  $\omega_M$  des ondes pouvant se propager dans ce milieu. On exprimera  $\omega_M$  en fonction de  $\alpha$  et  $m$ . A cette pulsation, quelle est la relation entre  $u_{n+1}$  et  $u_n$ . Décrire alors le mouvement relatif des atomes.

On se place maintenant dans l'approximation des milieux continus, dans laquelle la distance entre atomes  $a$  est très petite devant la longueur d'onde des ondes élastiques étudiées.

**Q18** – Que dire alors de la variable adimensionnée  $ka$  ?

Dans cette approximation, le déplacement  $u_n$  de l'atome  $n$ , situé en  $x = na$  au repos, peut être remplacé par une fonction continue  $u(x, t)$  où la variable  $x$  représente la position de cet atome au repos.

On peut alors, utilisant la formule des accroissements finis en remplaçant  $dx$  par  $a$ , écrire :

$$\frac{u_n(t) - u_{n-1}(t)}{a} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

$$\frac{u_{n+1}(t) - u_n(t)}{a} = \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t)$$

**Q19** – En reprenant l'équation de la question Q13, montrer que la fonction  $u(x, t)$  est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

On exprimera  $V$  en fonction de  $a$ ,  $\alpha$  et  $m$ .

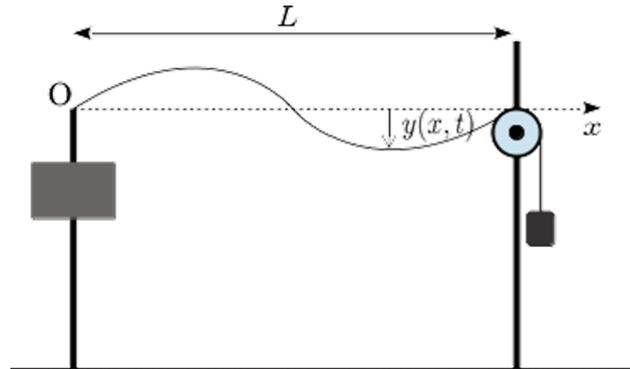
**Q20** – Que représente  $V$ ? Calculer numériquement  $V$  et  $f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$  dans le cas du silicium :  
 $a = 4,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $M_{\text{Si}} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $\alpha = 25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .  
 De quel type d'onde s'agit-il ?

**Suite HORS BAREME à ne pas de traiter**

**2.2 – Chaîne finie**

La chaîne est à présent finie, limitée à  $2N+1$  atomes, identiques aux précédents, numérotés de  $n = -N$  à  $n = +N$ . Les atomes des extrémités de la chaîne, de longueur  $L = 2Na$ , sont maintenus fixes et on se propose d'étudier les modes de vibration de ce système d'oscillateurs couplés, sous la forme d'une onde stationnaire de pulsation  $\omega$ , de vecteur d'onde  $k$ .

On se place dans l'approximation des milieux continus et on s'intéresse à l'analogie entre les modes stationnaires de la chaîne et ceux de la corde de Melde.



**Figure 4**

On étudie une corde infiniment souple de longueur  $L$ , de masse linéique  $\mu$ , attachée à ses extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  à des supports fixes dans le référentiel d'étude galiléen, et sur laquelle s'exerce une tension  $T_0$ . On note  $y(x,t)$  le déplacement transversal de la corde par rapport à sa position de repos. On envisage les ondes stationnaires susceptibles d'exister sur cette corde.

**Q21** – Donner la définition générale d'une onde stationnaire et écrire la forme générale de  $y(x,t)$  pour une onde stationnaire harmonique sur la corde.

**Q22** – Ecrire les conditions limites imposées à la fonction  $y(x,t)$  sur la corde de Melde et en déduire l'expression du module des vecteurs d'onde  $k_p$  de cette corde, en fonction de  $L$  et d'un entier naturel  $p$ .

**Q23** – En déduire l'expression de  $\omega_p$  la pulsation correspondante en fonction de  $L$ ,  $p$  et  $V_M$  la célérité des ondes élastiques.

**Q24** – Expliciter la fonction  $y_p(x,t)$ , onde stationnaire correspondant au mode  $p$ .

**Q25** – Représenter sur le même graphe l'allure de  $y_3(x,t)$  en fonction de  $x \in [0; L]$  à différents instants et y repérer ventres et nœuds.

**Q26** – Reproduire et compléter le tableau ci-dessous d'analogie entre la chaîne d'atomes et la corde de Melde.

	Chaîne d'atomes	Corde de Melde
Grandeur de propagation	$u(x,t)$	
Equation de propagation		
Conditions aux limites		
Célérité		$V_M = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

**Q27** – En revenant à la chaîne d'atomes, utiliser l'analogie pour calculer les pulsations  $\omega_p$  des modes propres de la chaîne d'atomes.

**Q28** – Comparer les résultats de cette partie à ceux de la partie 2.1. On discutera en particulier l'influence des conditions limites.

