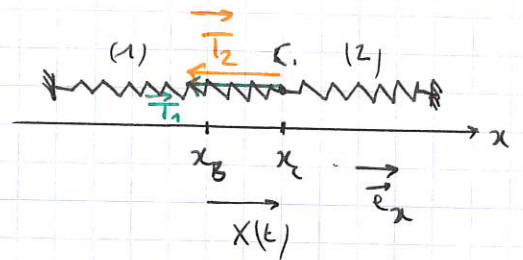


(Centrales-Supelec - TSI - 2015)

A1 a) $\vec{T}_1 = -k \times \vec{e}_x$
 $\vec{T}_2 = -k \times \vec{e}_x$



b) Posons $\mathcal{R}$: référentiel terrestre galiléen

$\mathcal{R}_b$: " du boîtier en translation rectiligne accéléré dans $\mathcal{R}$

$\vec{v}_A(\mathcal{R}) = \vec{v}_{\mathcal{R}_b}(\mathcal{R}) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = (\dot{x}_C - \dot{x}_B) \vec{e}_x = \dot{X} \vec{e}_x$ donc NON GALILÉEN

c) Théorème du centre d'inertie appliqué à C dans $\mathcal{R}_b$:

$m \vec{a}_{\mathcal{R}_b}(C) = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_f + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie}$ où $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}$
 force d'inertie d'entraînement.

$\vec{a}_{\mathcal{R}_b}(C) = \left(\frac{d}{dt} (\vec{v}_{\mathcal{R}_b}(C)) \right)_{\mathcal{R}_b} = (\ddot{x}_C - \ddot{x}_B) \vec{e}_x = \ddot{X} \vec{e}_x$

Projection selon $\vec{e}_x$: $m \ddot{X} = -2kX - 2f\dot{X} + ma$

$\Rightarrow \ddot{X} + \frac{2f}{m} \dot{X} + \frac{2k}{m} X = -a$ On pose: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
 $Q = \frac{m}{2f} \omega_0 = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{km}{2}}$

A2a) L'équation du mouvement étant linéaire, en régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution sinusoïdale de même pulsation ω et déphasée a priori.

$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

b) Notation complexe: $\underline{a}(t) = \underline{a}_m e^{i\omega t}$; $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{i\omega t}$; $\underline{X}_m = X_m e^{i\varphi}$

On injecte cette solution dans l'équation du mouvement complexe:

$-\omega^2 \underline{X}_m e^{i\omega t} + i \frac{\omega_0 \omega}{Q} \underline{X}_m e^{i\omega t} + \omega_0^2 \underline{X}_m e^{i\omega t} = -\underline{a}_m e^{i\omega t}$

$\Rightarrow \underline{X}_m = - \frac{\underline{a}_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q}}$

c) $\frac{\underline{X}_m}{\underline{a}_m / \omega_0^2} = - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$
 $\simeq -1$ en basses fréquences: $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$
 $\simeq \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ en hautes fréquences: $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$
 Pour $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$: $\underline{X}_m \simeq - \frac{\underline{a}_m}{\omega_0^2} \rightarrow X(t) = - \frac{a_m}{\omega_0^2} \cos(\omega t) = - \frac{a(t)}{\omega_0^2}$

Sous en basses fréquences, $X(t)$ est proportionnelle à $a(t)$, avec le coefficient $-\frac{1}{\omega_0^2}$.

$$d) \frac{X_m}{a_m/\omega_0^2} = \left| \frac{X_m}{a_m/\omega_0^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

e) La résonance se manifeste ici par un maximum de X_m pour une fréquence f_r d'une composante spectrale présente dans l'accélération.

X_m est maximal si $y(x) = \frac{X_m}{a_m/\omega_0^2}$ voit sa dérivée première s'annuler.

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{R(x)}}; \quad \frac{dy}{dx} = -R(x)^{-3/2} \frac{dR}{dx} \quad \text{s'annule si } \frac{dR}{dx} \text{ s'annule.}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dx^2} \times \frac{dx^2}{dx} = 2x \frac{dR}{dx^2} \quad \text{s'annule en } x \neq 0 \text{ si } \frac{dR}{dx^2} \text{ s'annule}$$

$$\frac{dR}{dx^2} = -2(1-x^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Rightarrow x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad x_r = \frac{f_r}{f_0}$$

$$\text{donc } f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{Cette résonance n'existe que si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f) f_0 = \frac{f_r}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} = 5,5 \text{ kHz} \approx f$$

$$\text{Sous le domaine basse fréquence d'utilisation } X_m = \frac{a_m}{\omega_0^2} = \frac{a_m}{(2\pi f_0)^2}$$

$$\text{AN: } a_m = 1g = 9,81 \text{ ms}^{-2} \rightarrow X_m = 8,1 \text{ nm}$$

C'est l'ordre de grandeur d'un rayon atomique, donc tel quel très en deçà de la capacité d'un MEMS type mass ressort.

$$21 a) E_p = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{C_0 e}{e+x} U^2$$

$$b) \vec{F} = -\text{grad } E_p = -\frac{dE_p}{dx} \vec{e}_x = \frac{C_0 e}{2(e+x)^2} U^2 \vec{e}_x = \vec{F}$$

$$c) F = \|\vec{F}\| = \frac{C_0}{2e} U^2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

$$d) m = 1 \mu\text{g} \rightarrow \frac{F}{m} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2} \approx 5 \cdot 10^{-3} g \quad \text{donc la force électrique en jeu semble sous-dimensionnée pour mesurer une accélération de l'ordre de } g.$$

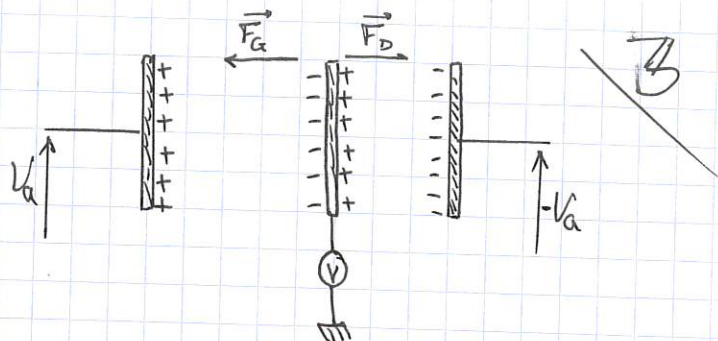
B2 a) $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_D$

$$\vec{F} = -\frac{Qe}{2(e+x)^2} (V_a - V)^2 \vec{e}_x$$

$$+ \frac{Qe}{2(e-x)^2} (V_a + V)^2 \vec{e}_x$$

$$\rightarrow \vec{F} = \frac{Qe}{2} \left[\left(\frac{V_a + V}{e-x} \right)^2 - \left(\frac{V_a - V}{e+x} \right)^2 \right] \vec{e}_x \quad \text{où } V = -V_a \frac{x}{e}$$

$$= \frac{Q V_a^2}{2e} \left[\left(\frac{e-x}{e-x} \right)^2 - \left(\frac{e+x}{e+x} \right)^2 \right] \vec{e}_x = \vec{0}$$



b) * Sans l'électrode n'est soumise à aucune force dans $\mathcal{R}$. Elle y reste donc immobile.

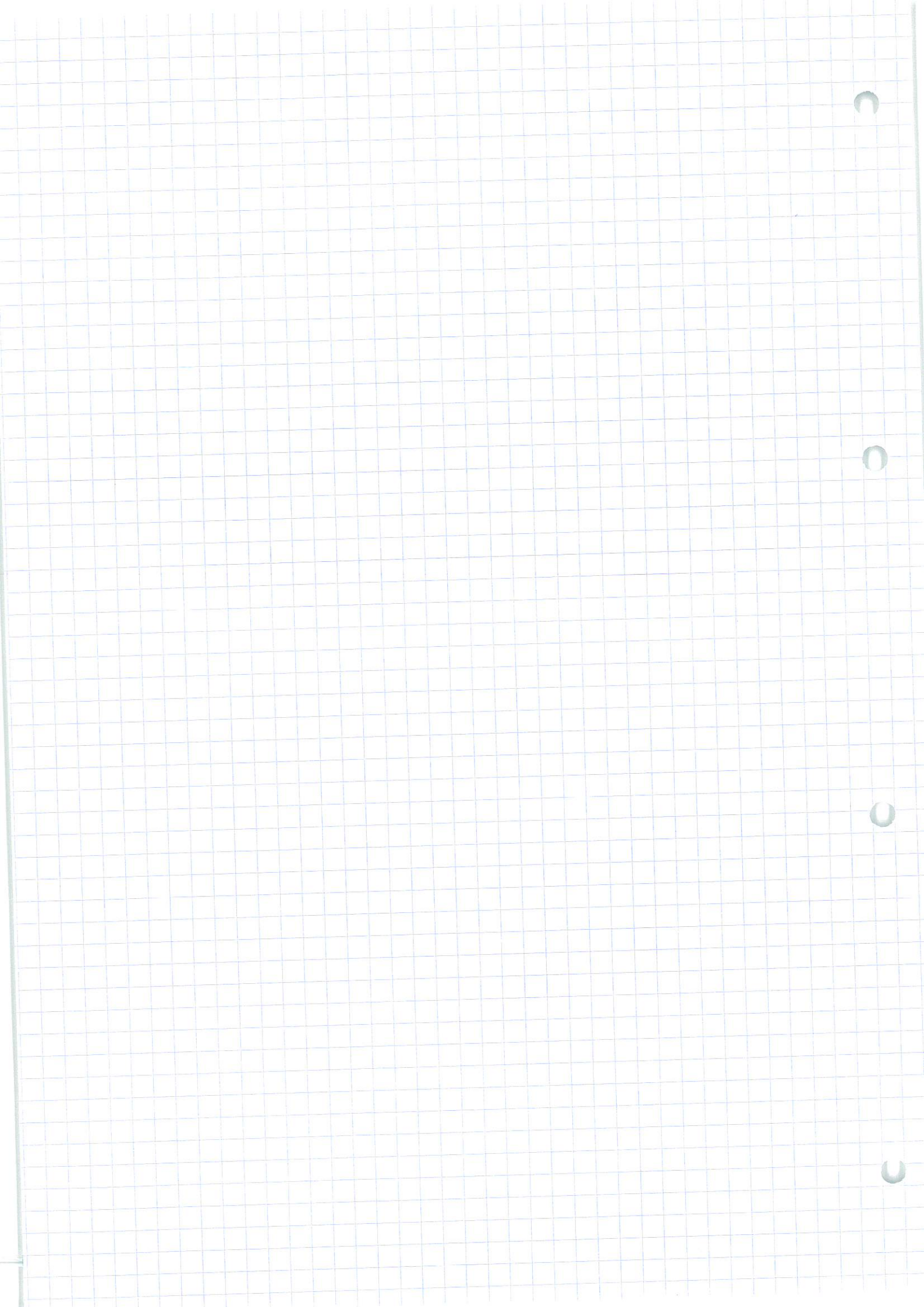
⊖ * de Thé dans $\mathcal{R}_b$ se réduit à $\ddot{x} = -a$ selon $\vec{e}_x \Rightarrow x_m = -\frac{a}{\omega^2}$

$$\Rightarrow V_m = -V_a \frac{x_m}{e} = V_a \frac{a}{e \omega^2} \text{ dépend de } \omega^2 \text{ contrairement au 1}^{\text{er}} \text{ dispositif}$$

* On mesure V ; Pour $\omega \approx 10 \text{ rad s}^{-1}$, $V_m \approx 10^5 \text{ V}$

⊕ Potentiels mesurables mais attention aux arcs électriques

⊖



ONDE SUR CORDE SUSPENDUE

(Mines-Ponts-PC-2007)

1. En M, s'ajoute à la tension $T(A)$ le poids de la corde en aval

$$T(M) = T(A) + \mu g(L-z) \quad \text{soit} \quad \underline{T(M) = T(A) + m_T g - \mu g z}$$

Où $T(A) \gg m_T g \gg \mu g z$ avec $z \in [0, L]$

Donc on peut négliger le poids de la corde. Ainsi $\underline{T(M) \simeq T(A)}$

2. Système: Élément de corde entre z et $z+dz$, de masse $dm = \mu dz$

Référentiel lié à B supposé galiléen

Forces: $\vec{T}(z+dz, t)$: tension aval
 $-\vec{T}(z, t)$: tension amont.

Principe fondamental de la dynamique

$$dm \vec{a}(z, t) = \vec{T}(z+dz, t) - \vec{T}(z, t)$$

Projection selon $\vec{e}_x$: $\mu dz \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(z, t) = T(z+dz, t) \cdot \sin(\theta(z+dz, t)) - T(z, t) \cdot \sin(\theta(z, t))$ (a)

selon $\vec{e}_y$: $0 = T(z+dz, t) \cos(\theta(z+dz, t)) - T(z, t) \cos(\theta(z, t))$ (b)

Où $\theta \ll 1 \text{ rad} \rightarrow \sin \theta \simeq \theta$; $\cos \theta \simeq 1$ au 1^{er} ordre

et $\tan \theta = \frac{\partial x}{\partial z} \simeq \theta$

(a) $\Rightarrow 0 = T(z+dz, t) - T(z, t)$ ainsi T est indépendant de z ($T = T(A)$)

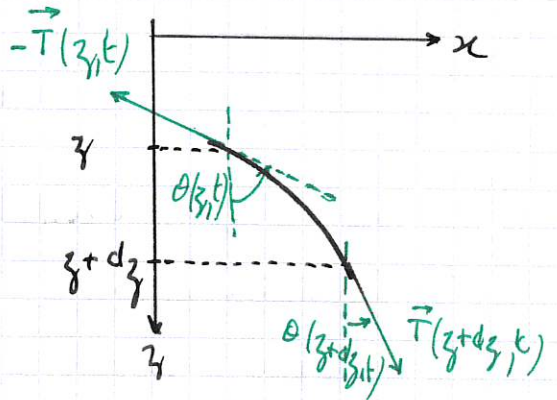
(b) $\Rightarrow \mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(z, t) = T \left(\frac{\partial x}{\partial z}(z+dz, t) - \frac{\partial x}{\partial z}(z, t) \right)$
 $= T \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz \rightarrow \underline{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0}$

Où pose $c = \sqrt{\frac{T(A)}{\mu}}$ A.N: $\underline{c = 32 \text{ m.s}^{-1}}$

3. Fixée à ses deux extrémités, on cherche des solutions stationnaires (i.e. à variables séparées) que l'on injecte dans l'équation d'onde:

$$X(z) \ddot{A}(t) - c^2 X''(z) A(t) = 0, \text{ on divise par } X(z) A(t) \neq 0$$

$$\frac{\ddot{A}(t)}{A(t)} = -c^2 \frac{X''(z)}{X(z)} \quad \text{Où } z \text{ et } t \text{ sont des variables indépendantes}$$



Donc $\frac{X''}{X}(z) = -k^2$: constante positive, permettant ainsi des solutions bornées.

$$\frac{\ddot{A}}{A}(t) = -k^2 c^2 = -\omega^2$$

$$\begin{cases} X(z) = \alpha \cos(kz + \varphi) \\ A(t) = \beta \cos(\omega t + \psi) \end{cases} \Rightarrow x(z, t) = C \cos(kz + \varphi) \cos(\omega t + \psi)$$

Conditions limites : $x(0, t) = C \cos \varphi \cos(\omega t + \psi) = 0 \quad \forall t$
on peut choisir $\varphi = -\pi/2$

$$x(L, t) = C \sin(kL) \cos(\omega t + \psi) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow x(z, t) = C \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos(\omega t + \psi) \quad \hookrightarrow \underline{kL = n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Condition initiale : $x(z, 0) = a \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) = C \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos(\psi)$.

Donc $n=1$, on choisit $\psi=0$, ainsi $C=a$.

$$\Rightarrow \underline{x(z, t) = a \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t)}$$

N.B. : $\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega a \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin(\omega t)$. Ainsi le choix $\psi=0$ assure que la vitesse initiale de tout point de la corde est nulle.

4. L'équation d'onde étant linéaire, la superposition de deux modes propres est encore solution.

Par analogie avec 3), on écrit la solution :

$$\underline{x(z, t) = a \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t) + b \sin\left(\frac{4\pi z}{L}\right) \cos(4\omega t)}$$

5. On constate sans surprise que lorsque l'amplitude a de la déformation de la corde augmente, celle-ci s'allonge. car $\omega = kc = \frac{n\pi c}{L}$.

L'hypothèse de masse linéique constante n'est alors plus valable. La célérité des ondes change donc également car

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu(L)}} = \sqrt{\frac{TL}{m_T}} : \text{la célérité est donc une fonction croissante de la déformation } a.$$

6- Ici, $T(A)=0$. Donc d'après 1), $T(z) = \mu g(L-z)$

7- En reprenant l'équation b) du 2), projection du P.F.D. selon (ou) dans l'approximation des petits déplacements

$$\begin{aligned} \mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= T(z+dz) \frac{\partial x}{\partial z}(z+dz, t) - T(z) \frac{\partial x}{\partial z}(z, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (T \cdot \frac{\partial x}{\partial z}) dz = \left(\frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + T(z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) dz \\ \rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(L-z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \end{aligned}$$

8- On ajoute la force de frottement visqueux au PFD précédent. On obtient selon ex

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(L-z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial x}{\partial t}$$

9- Pour $z \ll L$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + gL \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial x}{\partial t}$$

On y injecte la solution proposée. Toutes simplifications faites, il vient

$$-\omega^2 = +jk g - k^2 gL - j\omega \frac{\alpha}{\mu}$$

Si k est réelle alors la partie imaginaire de cette équation vérifie

$$+kg - \omega \frac{\alpha}{\mu} = 0 \rightarrow \alpha = \alpha_0 = \frac{\mu k g}{\omega}$$

Par ailleurs, la partie réelle vérifie : $-\omega^2 = -k^2 gL \rightarrow k = \frac{\omega}{\sqrt{gL}}$

d'où $\alpha_0 = \mu \sqrt{\frac{g}{L}}$

10- On injecte la solution dans l'équation du 7. Il vient pour $z \ll L$:

$$-\omega^2 = -k^2 gL + jk g \quad \text{ou} \quad \underline{k} = k_1 + jk_2$$

$$\Rightarrow -\omega^2 = -(k_1^2 - k_2^2)gL - 2jk_1 k_2 gL + jk_1 g - k_2 g$$

La partie imaginaire vérifie $2jk_1 k_2 gL = jk_1 g \rightarrow k_2 = \frac{1}{2L} > 0$

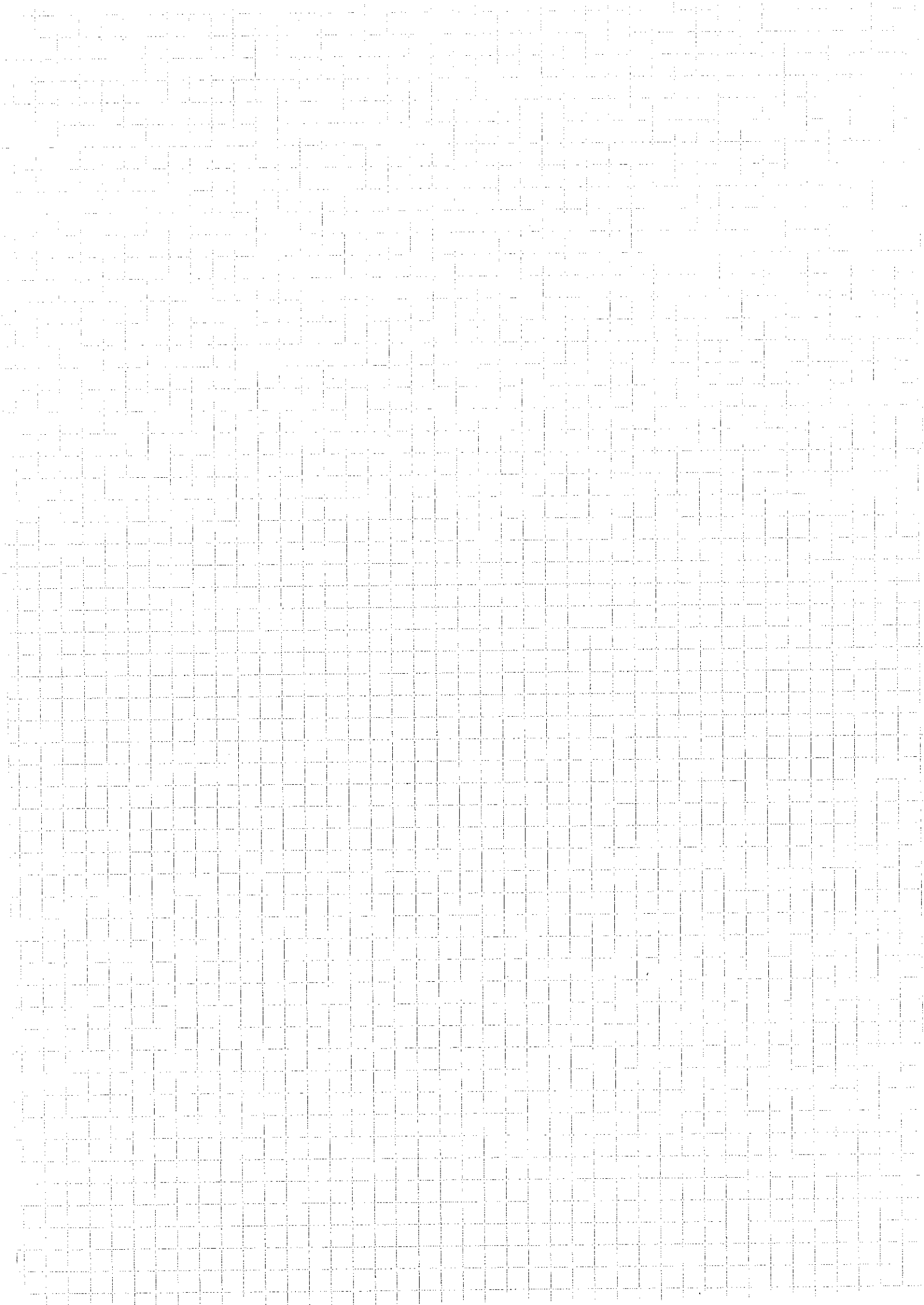
Ainsi $\underline{x} = \underline{x}_0 e^{z/2L} e^{j(\omega t - k_1 z)}$, où $\underline{x}_0 = x_0 e^{j \arg(\underline{x}_0)}$

donc $x = \text{Re } \underline{x} = x_0 e^{z/2L} \cos(\omega t - k_1 z + \arg(\underline{x}_0))$ d'amplitude croissante.

11- La partie réelle de l'équation du 10 donne $\omega^2 = (k_1^2 - \frac{1}{4L^2})gL - \frac{g}{2L}$

$$\Rightarrow k_1^2 = \frac{1}{gL} (\omega^2 - \frac{g}{4L}) > 0 \text{ donc } k_1 \text{ réel si } \omega > \sqrt{\frac{g}{4L}}$$

$\sqrt{\frac{g}{4L}}$ constitue donc une pulsation de coupure. La corde se comporte comme un filtre PASSE HAUT.



OSCILLATEURS ET MODES PROPRES

(Agrégation 2023)

Q1. $\vec{F}'_1 = -k'(l_0 + x_2 - x_1 - l_0)(-\vec{e}_x) \Rightarrow \vec{F}'_1 = k'(x_2 - x_1)\vec{e}_x$

Q2. $\vec{F}'_2 = -k'(l_0 + x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x \Rightarrow \vec{F}'_2 = -k'(x_2 - x_1)\vec{e}_x$

Q3. * Référentiel : $\mathcal{R}$ lié au bâti, supposé galiléen

Système : M_1 .

Forces appliquées : $\vec{F}_1 = -k(l_0 + x_1 - l_0)\vec{e}_x = -kx_1\vec{e}_x$

$$\vec{F}'_1 = k'(x_2 - x_1)\vec{e}_x.$$

Loi de Newton : $m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{m}x_1 = \frac{k'}{m}x_2$ (1)

* Système : M_2

Forces appliquées : $\vec{F}_2 = -k(l_0 - x_2 - l_0)(-\vec{e}_x) = -kx_2\vec{e}_x$

$$\vec{F}'_2 = -k'(x_2 - x_1)\vec{e}_x.$$

Loi de Newton : $m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{m}x_2 = \frac{k'}{m}x_1$

Q4 - (1) + (2) : $\ddot{s} + \frac{k+k'}{m}s = \frac{k'}{m}s \Rightarrow \ddot{s} + \frac{k}{m}s = 0$ (3) (2)

(1) - (2) : $\ddot{d} + \frac{k+k'}{m}d = -\frac{k'}{m}d \Rightarrow \ddot{d} + \frac{k+2k'}{m}d = 0$ (4)

Q5. * Solution de (3) : $\Omega_s^2 = \frac{k}{m} \rightarrow s(t) = A \cos(\Omega_s t) + B \sin(\Omega_s t)$

* Solution de (4) : $\Omega_a^2 = \frac{k+2k'}{m} \rightarrow d(t) = C \cos(\Omega_a t) + D \sin(\Omega_a t)$

Q6 - $x_1 = \frac{s+d}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} [A \cos(\Omega_s t) + B \sin(\Omega_s t) + C \cos(\Omega_a t) + D \sin(\Omega_a t)]$

$x_2 = \frac{s-d}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} [A \cos(\Omega_s t) + B \sin(\Omega_s t) - C \cos(\Omega_a t) - D \sin(\Omega_a t)]$

Q7 - $\dot{s} = \Omega_s (-A \sin(\Omega_s t) + B \cos(\Omega_s t))$

$\dot{d} = \Omega_a (-C \sin(\Omega_a t) + D \cos(\Omega_a t))$

Conditions initiales : $\dot{s}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 2v_0 = B\Omega_s \Rightarrow B = \frac{2v_0}{\Omega_s}$

$d(0) = x_1(0) - x_2(0) = 0 = C$

$\dot{d}(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = 0 = D\Omega_a \Rightarrow D = 0$

$s(0) = x_1(0) + x_2(0) = 2x_0 = A \Rightarrow$

$\Rightarrow s(t) = 2(x_0 \cos(\Omega_s t) - \frac{v_0}{\Omega_s} \sin(\Omega_s t)) ; d(t) = 0$

Q7. $x_1(t) = \frac{A(t)}{2} = x_0 \cos(\Omega_s t) + \frac{v_0}{\Omega_s} \sin(\Omega_s t)$ M_1 et M_2 sont synchrones
 $x_2(t) = \frac{A(t)}{2} = x_1(t)$ et en phase comme reliés par une tige rigide de raideur infinie.

Il semble donc cohérent que h' ne figure pas dans la solution.

Q9. Proposons les conditions initiales $\begin{cases} x_1(0) = -x_2(0) = x_0 \\ \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) = v_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \dot{A}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases} ; \begin{cases} d(0) = 2x_0 \Rightarrow C = 2x_0 \\ \dot{d}(0) = 2v_0 \Rightarrow D = \frac{2v_0}{\Omega_a} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A(t) = 0 \\ d(t) = 2 \left(x_0 \cos(\Omega_a t) + \frac{v_0}{\Omega_a} \sin(\Omega_a t) \right) \end{cases}$ M_1 et M_2 sont alors synchrones et en opposition de phase.

Q10. (a) : mode symétrique : x_1 et x_2 synchrones en phase

(b) : mode antisymétrique : x_1 et x_2 synchrones en opposition de phase.

Q11. On lit :

	mode symétrique	mode antisymétrique
$x_1(0) \text{ (cm)}$	2	2
$x_2(0) \text{ (cm)}$	2	-2
$\dot{x}_1(0)$	0	0
$\dot{x}_2(0)$	0	0

Q12. Graphes (a) : $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} ; T_s = 2 \text{ s} \Rightarrow \Omega_s = 3,1 \text{ rad s}^{-1}$
 (b) : $\Omega_a = \frac{2\pi}{T_a} ; T_a = 1,8 \text{ s} \Rightarrow \Omega_a = 3,5 \text{ rad s}^{-1}$

$h = m \Omega_s^2 = 0,99 \text{ N.m}^{-1}$ $h' = \frac{1}{2} m (\Omega_a^2 - \Omega_s^2) = 0,12 \text{ N.m}^{-1}$

Q13. Référentiel R

Système : atome μ de masse μ .

Forces appliquées : $\vec{F}_g = -\alpha(a + u_{n+1} - u_n - a)\vec{e}_x = -\alpha(u_{n+1} - u_n)\vec{e}_x$

$\vec{F}_s = -\alpha(a + u_n - u_{n-1} - a)\vec{e}_x = -\alpha(u_{n-1} - u_n)\vec{e}_x$

PFD selon $\vec{e}_x$: $m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \alpha(u_{n+1} - u_n) + \alpha(u_{n-1} - u_n)$

$\rightarrow \frac{d^2 u_n}{dt^2} + \frac{2\alpha}{m} u_n = \frac{\alpha}{m} u_{n+1} + \frac{\alpha}{m} u_{n-1}$

Q14. On cherche ici une solution en onde plane, harmonique, progressive

Q15 - On injecte cette solution dans l'équation du mouvement précédente en notation complexe (puisque l'équation est linéaire)

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \underline{u}_n + \frac{k\alpha}{m} \underline{u}_n &= \frac{\alpha}{m} A e^{ik(x_n+a)-\omega t} + \frac{\alpha}{m} A e^{ik(x_n-a)-\omega t} \\
 &= \frac{\alpha}{m} \underline{u}_n (e^{ika} + e^{-ika}) \\
 &= \frac{k\alpha}{m} \underline{u}_n \cos(ka)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[-\omega^2 + \frac{k\alpha}{m} (1 - \cos(ka)) \right] \underline{u}_n = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \cos(ka) = 2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\omega^2 + \frac{k\alpha}{m} 2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{m\omega^2}{4\alpha}}$$

Q16 - La fonction $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est π -périodique pour $\frac{\theta}{2} = \frac{ka}{2}$ donc $2a$ -périodique pour ka .
 De plus $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est paire. On peut donc restreindre l'étude à $ka \in [0, \pi]$ (de plus $ka > 0$ par définition)

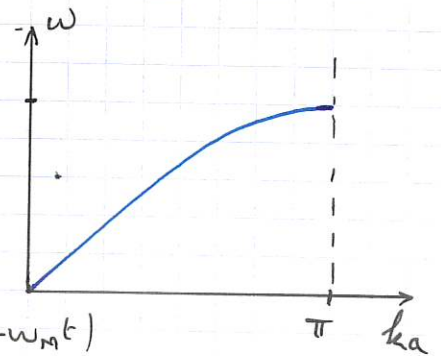
$$\omega = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

Q17 $|\sin(\frac{ka}{2})| \leq 1 \Rightarrow \omega_M = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

Pour $\omega = \omega_M$, $ka = \pi$:

$$u_{n+1} = A e^{i\left(\frac{\pi}{a}(x_n+a) - \omega_M t\right)} = A e^{i\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{a}x_n - \omega_M t\right)}$$

$\underline{u}_{n+1} = -\underline{u}_n$ Les atomes adjacents vibrent en opposition de phase. (mode antisymétrique)



Q18 - Approximation du milieu continu: $a \ll \lambda \Rightarrow ka = \frac{ka}{1} \ll 1$.

Q19 - D'après Q13: $\frac{d^2 \underline{u}_n}{dt^2} = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$; $u_{n+1} = u_n + a \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t)$; $u_{n-1} = u_n - a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} + \frac{k\alpha}{m} \underline{u} = \frac{\alpha}{m} \left[u_n + a \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) + u_n - a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \frac{\alpha a}{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = \frac{\alpha a}{m} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} dx \quad \text{où } \underline{dx} = a$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} - \frac{\alpha a^2}{m} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{On pose } \boxed{V = \sqrt{\frac{\alpha a^2}{m}}}$$

Q20 - V est la célérité des ondes longitudinales dans le solide.

A.N.: $V = 9,3 \text{ km s}^{-1}$; $f_M = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 7,4 \text{ THz}$: ondes ultrasonores.

Q21. Onde stationnaire: Onde qui ne se propage pas, caractérisée par une fonction d'onde à variables séparées: $y(x,t) = f(x)g(t)$.

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \varphi)$$

où $k = \frac{\omega}{V_m}$ car l'onde est une solution d'une équation de D'Alembert.

Q22. Conditions limites: $y(0,t) = 0$
 $y(L,t) = 0$

$$y(0,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos \varphi = 0$$

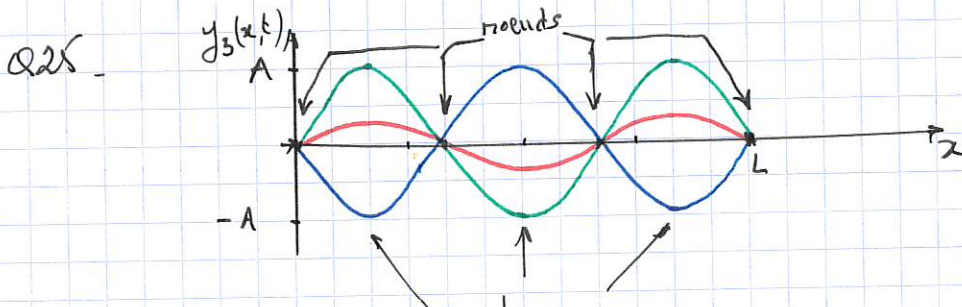
Choisissons $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$$y(L,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL) = 0$$

$$\Rightarrow k_p = p \frac{\pi}{L}, \quad p \in \mathbb{N}^*$$

Q23. $\omega_p = k_p V_m = p \frac{\pi V_m}{L}$

Q24. $y_p(x,t) = A_p \cos(\omega_p t + \varphi) \sin(p \frac{\pi x}{L})$



On choisit $\varphi = 0$

Q26.

	chaîne d'atomes	corde de Melde
Grandeur de propagation	$u(x,t)$	$y(x,t)$
Equation de propagation	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - V_m^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$
Conditions aux limites	$u(0,t) = u(L,t) = 0$	$y(0,t) = y(L,t) = 0$
Célérité	$V = a \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$	$V_m = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

Q27. $\omega_p = p \pi \frac{V}{L} = p \pi \frac{a}{L} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

Q28. $\omega_m = L \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 46 \cdot 10^{12} \text{ rad s}^{-1}$ et $\omega_1 = \pi \frac{a}{L} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 2,9 \cdot 10^5 \text{ rad s}^{-1}$
 $\omega_1 \ll \omega_m$

Pour une excitation quelconque de la tige en silicium, un très grand nombre de modes propres seront excités simultanément. Le spectre quasi-continu comme si la tige était semi-infinie. Les conditions limites ont à cette échelle ($a \ll L$) peu d'influence.