

Recommandations :

- Pour choisir l'ordre dans lequel vous traiterez les problèmes lisez le sujet en entier au préalable.
- Les résultats littéraux et numériques doivent être **encadrés**.
- Un résultat numérique sans **unité** est considéré faux.
- Les **correcteurs** (effaceurs, peinture, ruban, stylo à friction) sont interdits.
- La rédaction se fait en langue française respectant syntaxe, grammaire et orthographe.
- Une relecture finale attentive avant la fin de l'épreuve est indispensable.

Pénalité : Un défaut de qualité de la copie (présentation, écriture, orthographe, syntaxe) pourra faire l'objet d'une pénalité de 1 ou 2 points sur la note finale.

Thermodynamique

Cycle de Brayton dans les centrales nucléaires de 4^{ème} génération

Les centrales nucléaires de la génération 4 prévues vers les années 2030 devront être sûres et présenter un rendement important. Une option étudiée parmi 6 grands choix est le réacteur à très haute température refroidi à l'hélium. Ce type de réacteur offrirait l'avantage d'améliorer l'efficacité de la conversion énergétique, compte tenu de la température élevée de la source chaude et de permettre en sus la production d'hydrogène. Dans ces installations de forte puissance, on utilise le cycle de Brayton (ou cycle de Joule) pour extraire le travail et, en fin de compte, produire de l'électricité.

Le gaz utilisé dans la centrale est l'hélium, dont les caractéristiques sont :

$$C_{vm} = \frac{3}{2}R, \quad C_{pm} = \frac{5}{2}R, \quad \gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} \quad \text{avec } R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}, \quad M_{He} = 4,00.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$$

Dans l'ensemble du problème, le gaz est supposé parfait.

Un gaz parfait circule dans une installation. Il échange du travail avec l'extérieur dans le compresseur et la turbine. Le travail fourni par le passage du gaz dans la turbine sert d'une part à faire fonctionner le compresseur (turbine et compresseur montés sur le même axe) et d'autre part à fabriquer de l'électricité. Les transferts thermiques ont lieu dans des échangeurs. Le fluide, ici un gaz d'hélium, décrit le cycle de Brayton.

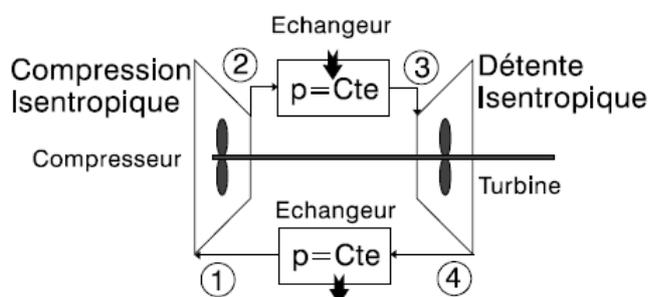


Figure 1

Ce cycle est constitué de deux isobares et de deux isentropiques :

- compression adiabatique réversible du point ① avec une température $T_1 = 300 \text{ K}$ et une pression $p_1 = 20.10^5 \text{ Pa}$ vers le point ② à la pression $p_2 = 80.10^5 \text{ Pa}$,
- détente isobare du point ② vers le point ③ à la température $T_3 = 1300 \text{ K}$,
- détente adiabatique réversible de ③ vers ④ (de $p_3 = p_2$ à $p_4 = p_1$),
- compression isobare de ④ vers ①.

1 - Déterminer les températures T_2 et T_4 . Effectuer l'application numérique.

2 - Tracer le cycle de Brayton sur un diagramme $p = f(V_m)$ où V_m est la volume molaire.

3 - Calculer les travaux W_{12} et W_{34} échangés avec l'extérieur lors des transformations isentropiques ① ② et ③ ④.

Effectuer l'application numérique pour une mole d'hélium.

4 - Exprimer les transferts thermiques reçus Q_{23} et Q_{41} . Effectuer l'application numérique pour une mole d'hélium.

5 - Montrer que l'efficacité se met sous la forme : $e = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{(r_p)^\beta} \right)$ avec $r_p = \frac{p_2}{p_1}$ et $\beta = \frac{\gamma-1}{\gamma}$

6 - Calculer numériquement cette efficacité et comparer à l'efficacité de Carnot obtenue en utilisant les deux températures extrêmes du cycle.

7 - Exprimer le travail reçu au cours d'un cycle à partir des températures extrêmes T_3 et T_1 , de R (ou C_p), de β et du rapport des pressions r_p .

8 - Montrer que la valeur absolue du travail passe par une valeur maximale pour une valeur r_{pm} du rapport des pressions r_p pour :

$$r_{pm} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{1}{2\beta}}$$

Calculer numériquement r_{pm} et l'efficacité dans ce cas.

Optique géométrique

Périscope (QCM)

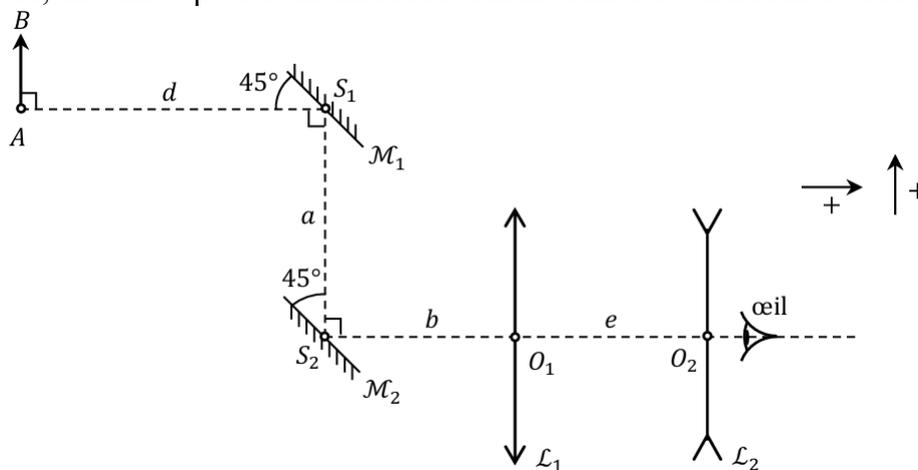
L'entrée d'un périscope est constituée de deux miroirs plans \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , circulaires et de centres respectifs S_1 et S_2 (Fig. ci-après). Après réflexions sur \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , la lumière entre dans un système de deux lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , assimilées à des lentilles minces de centres respectifs O_1 et O_2 . Les miroirs sont inclinés d'un angle de 45° par rapport à l'axe optique du système représenté en pointillés. L'orientation algébrique de l'axe optique ainsi que celle de l'axe transversal sont indiquées sur la figure (signes +).



Les distances focales images algébrisées de \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont respectivement $f_1' = 1 \text{ m}$ et $f_2' = -0,125 \text{ m}$. Un œil emmétrope (c'est-à-dire sans défaut) est placé juste derrière \mathcal{L}_2 . Le périscope \mathcal{S}_p est donc l'ensemble catadioptrique $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$. On observe un objet placé dans un plan transversal, en avant de \mathcal{S}_p .

On introduit les distances $a = S_2S_1 > 0$, $b = S_2O_1 > 0$, $e = O_1O_2 > 0$, $d = AS_1 > 0$.

Dans tout l'exercice, on admet que les lentilles fonctionnent dans les conditions de Gauss.



Répondez aux questions suivantes en indiquant la ou les lettres choisies parmi les solutions proposées. On ne demande pas de justification.

1 - L'objet AB est placé à grande distance du périscope (suffisamment loin pour que d puisse être considéré infini). On note e_0 la valeur de e permettant à l'œil d'observer AB à travers \mathcal{S}_p sans accommoder.

Exprimer e_0 :

A) $e_0 = f_1' - f_2'$ B) $e_0 = f_1'$ C) $e_0 = f_2'$ D) $e_0 = f_1' + f_2'$

2 - L'objet étant encore à l'infini, on règle \mathcal{S}_p de telle sorte que $e = e_0 - \epsilon$ où $\epsilon > 0$ et $\epsilon \ll e_0$. Que peut-on affirmer ?

- A) L'image de AB par \mathcal{S}_p est réelle. C) L'œil peut observer une image nette à travers \mathcal{S}_p .
 B) L'image de AB par \mathcal{S}_p est virtuelle. D) L'œil ne peut pas observer d'image nette à travers \mathcal{S}_p .

3 - L'objet est maintenant placé à distance finie. On note A_1B_1 l'image de AB par le système $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_1\}$ et $p'_1 = O_1A_1$. Exprimer p'_1 :

A) $p'_1 = \frac{f'_1(a+b+d)}{a+b+d-f'_1}$ B) $p'_1 = \frac{f'_1(a+b+d)}{a+b+d+f'_1}$ C) $p'_1 = \frac{f'_1(a+b+d)}{a+b+d+f'_1}$ D) $p'_1 = \frac{f'_1 d}{d-f'_1}$

4 - Quelle est alors la taille (grandeur algébrique) A_1B_1 de cette image intermédiaire ?

A) $\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{f'_1+a+b+d} \overline{AB}$ B) $\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{f'_1+d} \overline{AB}$
 C) $\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{f'_1-d} \overline{AB}$ D) $\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{f'_1-a-b-d} \overline{AB}$

5 - L'image A_2B_2 de AB par \mathcal{S}_p se forme en avant de \mathcal{L}_2 , à une distance $A_2O_2 = d_m$ où $d_m = 25$ cm. On envisage que l'œil puisse désormais accommoder. En outre, $A_2B_2 = 1$ mm.

On note $\theta > 0$ l'angle sous lequel l'image de AB par \mathcal{S}_p est vue par l'observateur (on rappelle que l'œil est derrière et à proximité immédiate de \mathcal{L}_2). Que peut-on affirmer ?

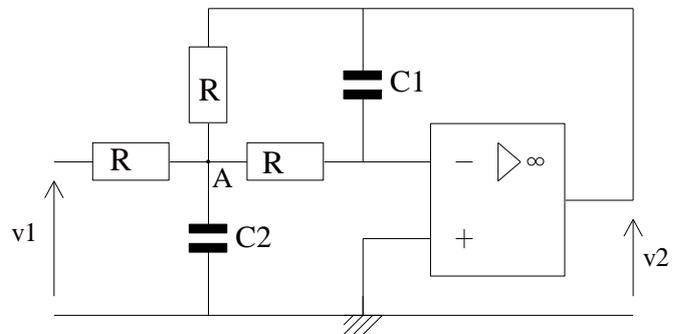
- A) $\theta \approx 10^{-3}$ rad B) $\theta \approx 4 \times 10^{-3}$ rad
 C) L'image est ponctuelle pour l'œil. D) L'image est étendue pour l'œil.

Electrocinétique

Filtre du seconde ordre

On réalise le circuit ci-contre :

L'amplificateur linéaire intégré (ALI) est idéal et fonctionne en régime linéaire, c'est-à-dire que les courants d'entrées sont d'intensités nulles et la différence de potentiel entre les entrées inverseuse (-) et non inverseuse (+) est également nulle.



1 - En basses fréquences, remplacer les condensateurs par leur dipôle équivalent. En déduire la valeur de v_2 .

Faire de même en haute fréquence et en déduire la nature du filtre.

2 - Montrer que la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\underline{G} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{G_0}{1 + 2 \cdot j \cdot m \cdot x - x^2}$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on précisera les expressions de G_0 , m et ω_0 .

Etude du régime transitoire

3 - On rappelle qu'en régime sinusoïdal forcé et en notation complexe : $j\omega \underline{v} = \frac{dv}{dt}$. En déduire l'équation différentielle reliant \underline{v}_1 et \underline{v}_2 et éventuellement leurs dérivées temporelles.

4 - On applique à l'entrée une tension constante à $t > 0$: $v_1(t) = E_0$.

Les deux condensateurs, étant déchargés à l'instant $t = 0$, Déterminer $v_2(0^+)$ et $v_2(\infty)$, valeurs de la tension de sortie respectivement initiale et en régime permanent stationnaire.

5 - On veut obtenir $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Calculer la valeur qu'il faut donner à C_2 sachant que $C_1 = 10$ nF. Quel est alors le type de régime transitoire choisi ?

Etude du filtre

On choisit R pour obtenir un filtre de fréquence propre $f_0 = 2$ kHz. On maintient $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6 - Le filtre présente-t-il une résonance ? Justifier.

7 – Etablir et tracer le diagramme de Bode (gain et déphasage) de ce filtre.

8 – Pour chacun des signaux d'entrée suivant, tracer sur un même graphe $v_1(t)$ et $v_2(t)$: envoi à l'entrée

8.1 - $v_1 = E_0 \cos(2\pi f_0 t)$

8.2 - $v_1 = E_0(1 + \cos(0,2\pi f_0 t))$

8.3 - $v_1 = E_0(1 + \cos(20\pi f_0 t))$

Mécanique

Saut à l'élastique

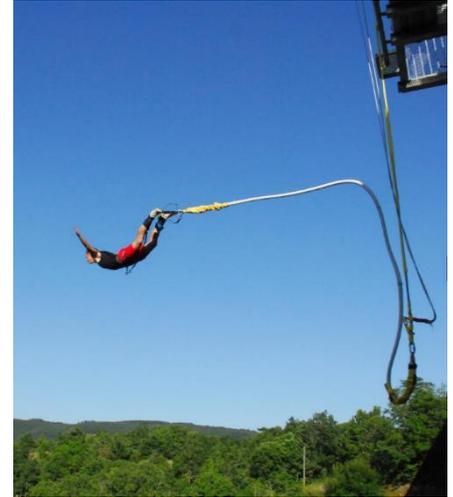
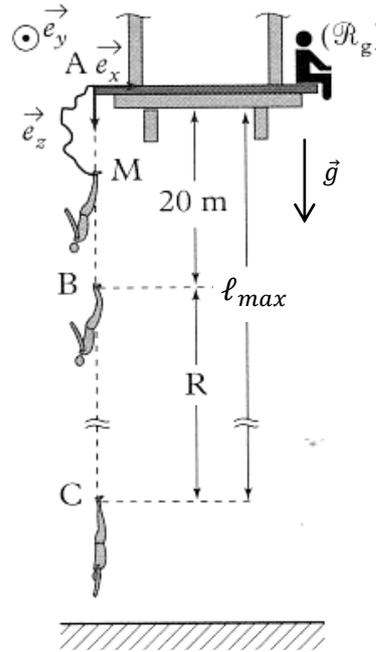
Pendant ses vacances, Monsieur R. saute à l'élastique. Il sera modélisé par un point matériel M, de masse $m = 70 \text{ kg}$, et tombe sans vitesse initiale depuis un pont (en A où $z = 0$) avec un élastique accroché aux pieds.

On supposera l'élastique de masse négligeable. Lorsqu'il est tendu, il exerce une force de rappel de même expression que celle qu'exerce un ressort. Ainsi lorsqu'il est détendu il n'exerce aucune force sur M.

$g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

On suppose le référentiel terrestre galiléen (\mathcal{R}_g) et on néglige tous les frottements et tout mouvement autre que vertical. Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B), l'élastique n'est pas tendu.

En C, le point M atteint son altitude minimale.



1^{ère} phase : mouvement entre A et B.

1 - Que peut-on dire de l'énergie mécanique du sauteur ? Ecrire son expression à l'instant t .

2 - Déterminer la vitesse v_0 du sauteur en B. *Application numérique.*

2^{ème} phase : mouvement entre B et C.

A partir de B, l'action de l'élastique est modélisable par un ressort, de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 20 \text{ m}$ et de raideur $k = 140 \text{ N.m}^{-1}$.

3 – Déterminer la longueur maximale ℓ_{max} de l'élastique lorsque le sauteur atteint C. *Application numérique.*

4 - Ecrire l'équation du mouvement de M lors de son mouvement vertical vérifiée par $z(t)$ entre B et C. Comment nomme-t-on ce type d'équation du mouvement ?

5 - Pour quelle longueur de l'élastique l'accélération subie par le sauteur est-elle maximale ?

6 - Déterminer $z(t)$ et tracer son allure entre les instants où le sauteur est en B puis en C.

7 – En pratique, après plusieurs oscillations, le point M s'arrête. Proposer des causes d'amortissement du mouvement. Calculer z_{eq} , la valeur de z à laquelle M s'arrête. *Application numérique.*

