Corrigé du DM8☆

I.A.1) L'équation locale de conservation de la masse s'écrit : $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{v})=0$.
On se place en régime stationnaire ce que suppose la dépendance exclusive en z des grandeurs : $div(\rho\vec{v})=0$
Donc le flux du vecteur densité de courant de masse $\rho\vec{v}$ est conservatif. Ainsi, son flux à travers une section de tube de courant donc le débit massique D_m, est indépendant de z :

$$D_m=\iint_{\substack{section\\tube}}\rho.\vec{v}.\overrightarrow{dS}=\rho(z).v(z).A(z)=Cte$$

I.A.2) Equation d'état des gaz parfaits : $P(z)=\rho(z).r.T(z)$
La deuxième loi de Joule vérifiée par le gaz parfait s'écrit sous forme différentielle : $dh=\frac{\gamma}{\gamma-1}r.dT$

I.A.3) Le gaz parfait subit une transformation isentropique. Il suit donc la loi de Laplace : $P(z).u^{\gamma}(z)=Cte$ où on a posé $u(z)=\frac{1}{\rho(z)}$le volume massique du gaz. Ainsi $P(z).\rho^{-\gamma}(z)=Cte$
L'identité thermodynamique relative à l'enthalpie massique h(z) s'écrit : dh = T.ds + u.dP
La transformation étant isentropique, il vient : $dh=\frac{1}{\rho(z)}dP$

I.A.4) L'écoulement étant stationnaire unidimensionnel et parfait, on y applique le premier principe industriel (ou équation des machines) entre la section d'entrée de la tuyère et la section de cote z :

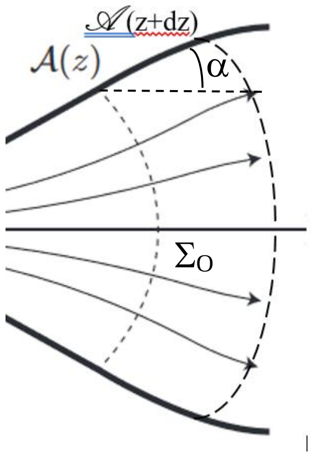
$$h(z)-h_0+\frac{1}{2}(v^2(z)-v_0^2)+g(z-z_0)=w_u+q$$

Or l'énoncé demande de négliger v_0 et la pesanteur. De plus, la tuyère est exempte de parties mobiles donc $w_u=0$ et le gaz y subit une transformation adiabatique donc q = 0. Ainsi :

$$h(z)-h_0+\frac{1}{2}v^2(z)=0$$

I.A.5) La différentielle logarithmique de la loi de Laplace exprimée au **I.A.3)** donne : $\frac{dP}{P}-\gamma\frac{d\rho}{\rho}=0$
Ainsi $\rho\chi_S=\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S=\frac{\rho}{\gamma P}$. Soit à l'aide de l'équation d'état exprimée au **I.A.2)** : $c_S(z)=\sqrt{\gamma rT(z)}$

I.A.6) Effectuons un bilan de quantité de mouvement sur une tranche élémentaire de gaz dans la tuyère (tuyère exclue du système), comprise entre les sections z et z + dz :



Instant t : système fermé constitué de la tranche de gaz indiquée sur la figure Σ_0 ∪ le gaz entrant pendant dt (e) :

$$d\vec{p}(t)=d\overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t)+\rho(z).v(z).A(z).v(z)dt\overrightarrow{u_z}$$

Instant t+dt : système fermé constitué de la tranche de gaz indiquée sur la figure Σ_0 ∪ le gaz sortant pendant dt (s)) :

$$d\vec{p}(t+dt)=d\overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t+dt)+\rho(z+dz).v^2(z+dz).A(z+dz).dt.\overrightarrow{u_z}$$

D'où $\frac{Dd\vec{p}}{Dt}=\frac{Dd\overrightarrow{p_{\Sigma_0}}}{Dt}+d(\rho v^2A)\overrightarrow{u_z}$ où $\frac{Dd\overrightarrow{p_{\Sigma_0}}}{Dt}=\vec{0}$ en **régime stationnaire**.

Les forces extérieures à ce système se limitent aux forces pressantes puisqu'on doit négliger la pesanteur.

$$d\vec{F}=(P(z)A(z)-P(z+dz)A(z+dz)+(P(z).A_{lat}.sin\alpha)\overrightarrow{u_z}$$

Où le terme $P(z).A_{lat}.sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$ est la résultante des forces pressantes exercées sur Σ_0 par la tuyère d'aire A_{lat}, obtenue par application de la 3ème loi de Newton.
On remarque que $A_{lat}.sin\alpha=A(z+dz)-A(z)=dA$. Ainsi :

$$d\vec{F}=(-d(PA)+P.dA)\overrightarrow{u_z}=-A(z)dP\overrightarrow{u_z}$$

D'où le bilan projeté selon $\overrightarrow{u_z}$: $d(\rho v^2A)=-A(z)dP$

Les équations à disposition :

Bilan de quantité de mouvement : $d(\rho v^2 A) = \rho v^2 dA + 2\rho v A dv + v^2 A d\rho = -AdP$ (a)

Conservation du débit (après différenciation) : $\rho v dA + \rho A dv + A v d\rho = 0$ (b)

Définition de c_s : $\rho \chi_S = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{c_s^2}$ ➔ $dP = c_s^2 . d\rho$ (c)

(b).v ➔ $\rho v^2 dA + \rho A v dv + A v^2 d\rho = 0$ (b')

(a)-(b') ➔ $\rho A v dv = -AdP$ ➔ $\rho v dv = -dP$ (d)

Soit en égalisant (d) et (c) ➔ $\rho v dv = -c_s^2 d\rho$ (d')

$\frac{1}{D_m}$ (b) ➔ $\frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$ qui donne en y injectant (d') : $\frac{dA}{A} + \left(1 - \frac{v^2}{c_s^2}\right)\frac{dv}{v} = 0$ Equation de Hugoniot.

I.A.7) Etude de l'évolution de la section de la tuyère en admettant en entrée un gaz subsonique (M<1) pour obtenir en sortie un gaz supersonique (M>1), et donc une accélération positive monotone tout au long de la traversée de la tuyère (dv>0) :

M	$\nearrow$ 1 $\nearrow$
v	$\nearrow$ c_S $\nearrow$
A	$\searrow$ A_{min} $\nearrow$

I.B.1) A l'aide des résultats du **I.A.2)** et du **I.A.4)** on obtient : $\frac{\gamma}{\gamma-1} r(T(z) - T_0) = -\frac{1}{2} v^2$

Et en utilisant les définitions du nombre de Mach et de la célérité des ondes sonores :

$\frac{\gamma}{\gamma-1} r(T(z) - T_0) = -\frac{1}{2} M^2 . \gamma r T(z)$ ➔ $T(z) = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}$

Le nombre de Mach étant croissant dans la tuyère, la température, elle, décroît.

I.B.2) La transformation du gaz (parfait) dans la tuyère étant isentropique, on réutilise ici la loi de Laplace, cette fois, liant T et ρ (que l'on comprend ici comme la masse volumique définie plus haut et nommée ici densité atomique !) : $T . \rho^{1-\gamma} = Cte$ ➔ $\rho(z) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/\gamma-1}}$

A(z) étant croissante dans le divergent, pour z suffisamment grand, $\frac{dA}{A(z)} \approx 0$ ➔ $(1 - M^2)\frac{dv}{v} \approx 0$ d'après la relation de Hugoniot. Or M ≠ 1 dans le divergent (voir **I.A.7)**) ➔ $dv \approx 0$ ➔ $dh \approx 0$ d'après **I.A.4)** ➔ $dT \approx 0$ d'après I.**A.2)** ➔ c_s = Cte d'après **I.A.5)** d'où $M(z) = Cte = M_\infty$.

I.B.3) D'après **I.B.1)** $\frac{\gamma}{\gamma-1} r(T(z) - T_0) = -\frac{1}{2} v^2$ ➔ $v(z) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_0 . \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}\right)}$

v(z) est indépendant de z si $\frac{\gamma-1}{2} M^2 \gg 1$ ➔ $M_\infty \gg \sqrt{3}$ ➔ $v_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_0}$ A.N. $v_\infty = 1{,}06$ km.s^{-1}

I.B.4) On calcule à l'aide des données : $\phi_{col} . P_0 . T_0^{-4/3} = 2{,}26.10^{-4}$ et on lit sur le diagramme M_∞. = 10 qui vérifie bien la condition $M_\infty \gg \sqrt{3}$.