DEVOIR MAISON n°7

pour le mercredi 9 octobre 2024

L'accent doit être mis sur la clarté et la précision de la rédaction, ainsi que sur le soin apporté aux calculs et à la présentation.
N'oubliez pas d'indiquer sur la copie le nom de la personne relectrice (code **R**) ou coautrice (code **A**).

Un oscillateur à relaxation : le vase de Tantale

On se propose ici d'étudier un oscillateur hydraulique.
On notera ρ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur :

$\rho = 1{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$
$g = 9{,}8\ m.s^{-2}$

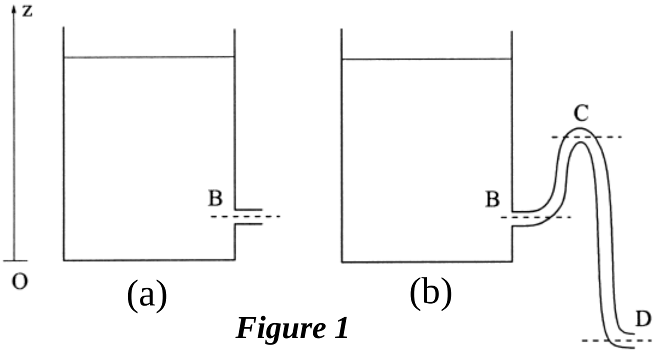


Figure 1

1 – Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir cylindrique dont la section horizontale est un disque d'aire S. Les hauteurs sont repérées à l'aide d'un axe vertical (Oz) orienté vers le haut, et dont l'origine coïncide avec le fond du réservoir (voir figure 1, (a)). Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur h et percé d'un orifice situé au niveau du point B, à hauteur z_B. Cet orifice possède une section droite σ. On nomme D_S le débit volumique d'eau sortant par l'orifice B associé à l'écoulement de vidange du réservoir. La surface libre (d'aire S) et l'extrémité de l'orifice B sont en contact avec l'air entourant le réservoir, à pression atmosphérique uniforme P_0 = 1 bar.
Tous les écoulements sont supposés parfaits, incompressibles. De plus, la vitesse du fluide est supposée uniforme au niveau de la surface libre et au niveau de l'orifice B.

1.1 – On assimile la vidange du réservoir à un écoulement stationnaire, en faisant l'hypothèse que la hauteur $h(t)$ de la surface libre varie lentement par rapport aux vitesses caractéristiques de l'écoulement. Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à l'écoulement, de la surface libre à l'orifice.

1.2 – Enoncer et appliquer le théorème de Bernoulli le long de ces lignes de courant, et déterminer, dans le cadre des hypothèses ci-dessus, et pour des sections droites S et σ quelconques, la vitesse du fluide v_B au niveau de l'orifice B.

1.3 – En déduire l'expression de $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$.
Que deviennent les expressions de v_B et $\dot{h}$ dans la limite où la section droite σ est très petite devant S ?

Dans toute la suite on considère valide l'approximation $\sigma \ll$ S.

1.4 – Calculer la valeur numérique du débit volumique D_S lorsque $h = 2{,}0\ m$, $z_B = 0{,}10\ m$ et $\sigma = 2{,}0\ cm^2$.
Exprimer le résultat en $L.s^{-1}$.

2 – Influence du siphon

Un siphon est une portion coudée de conduite, de section constante σ, dont la hauteur maximale représentée par le point C de la figure 1 (b), se trouve à une hauteur z_C supérieure à la hauteur z_B de l'orifice d'entrée de la conduite. Un siphon peur se trouver dans deux états. Dans l'état amorcé, le siphon ne contient pas d'air, et l'on peut considérer que le théorème de Bernoulli s'applique d'une extrémité à l'autre du siphon. L'extrémité D située à l'opposé du réservoir se trouve alors en contact avec l'air à pression atmosphérique P_0. Dans l'état désamorcé, le siphon contient de l'air, la continuité de l'écoulement dans le siphon est rompue, et le débit à travers la conduite est nul.
On supposera qu'une fois amorcé, le siphon est dans cet état jusqu'à ce que l'air pénètre par l'orifice situé en B. Le siphon est toujours amorcé lorsque le niveau d'eau excède z_C.

Données : $z_D = -0{,}20\ m$, $z_C = 0{,}30\ m$, $z_B = 0{,}10\ m$, $\sigma = 2{,}0\ cm^2$, $S = 1{,}0\ m^2$.

2.1 – Lorsque le siphon est amorcé, le réservoir se vide avec un débit sortant D_S , que l'on exprimera en fonction de h, g, σ et de la hauteur d'un des trois points B, C ou D.

2.2 – Donner une équation différentielle du premier ordre pour l'évolution temporelle de la hauteur h de la surface libre, dans le régime où le siphon est amorcé. Le réservoir n'est alimenté par aucune source.

2.3 – Trouver la solution de cette équation différentielle, en partant d'une condition initiale $h(0) = h_0 = z_C$. En déduire la valeur de la durée nécessaire t_1 pour que le siphon se désamorce.

3 – Réservoir alimenté

Le réservoir est désormais alimenté en permanence par un filet d'eau de débit D_i , arrivant par l'orifice A, et qui ne perturbe pas l'écoulement de vidange (figure 2).

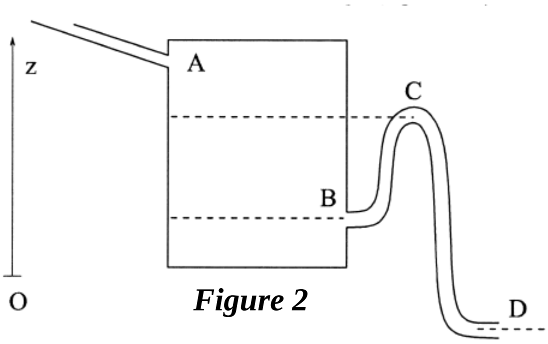


Figure 2

3.1 – Comment doit-on modifier l'équation différentielle portant sur h en présence d'un débit D_i venant alimenter le réservoir, le siphon étant amorcé ?

3.2 – Montrer que l'équation différentielle obtenue admet une solution stationnaire, de hauteur h_S constante, que l'on exprimera en fonction de z_D , D_i , σ et g.
Déterminer les valeurs de D_i successivement pour $h_s = z_B$ puis $h_s = z_c$.
En déduire l'évolution de $h(t)$ en fonction de la valeur D_i si l'on suppose cette dernière ajustable à volonté. ($D_i \in [0, +\infty[$).
En particulier, montrer que si le débit D_i est plus faible qu'une valeur critique D_c dont on précisera la valeur, le système représenté sur la figure 2, se comporte comme un oscillateur, dont le débit de sortie est une fonction périodique du temps.

3.3 – Déterminer la valeur de la durée t_2 de remplissage du réservoir entre l'instant où le siphon se désamorce et l'instant où il se réamorce, pour $D_i = 0{,}40\ L.s^{-1}$.

3.4 – On règle l'alimentation du réservoir à un débit $D_i = 0{,}40\ L.s^{-1}$. Représenter schématiquement l'allure temporelle de la hauteur $h(t)$ en fonction de t. On fera figurer les durées t_2 de remplissage, t_3 de vidange du réservoir jusqu'au désamorçage du siphon, et la période T du phénomène.

3.5 - On souhaite déterminer t_3 afin de calculer la période T des oscillations. Reprendre l'équation du **3.1** et poser la variable $u = D_i - \sigma\sqrt{2g(h - z_D)}$. Intégrer la nouvelle équation différentielle obtenue et en déduire la valeur numérique de t_3 puis de T en prenant une hauteur initiale $h(0) = z_c$.

Le supplice de Tantale

Hélas ! plus d'un de nous en la verte jeunesse

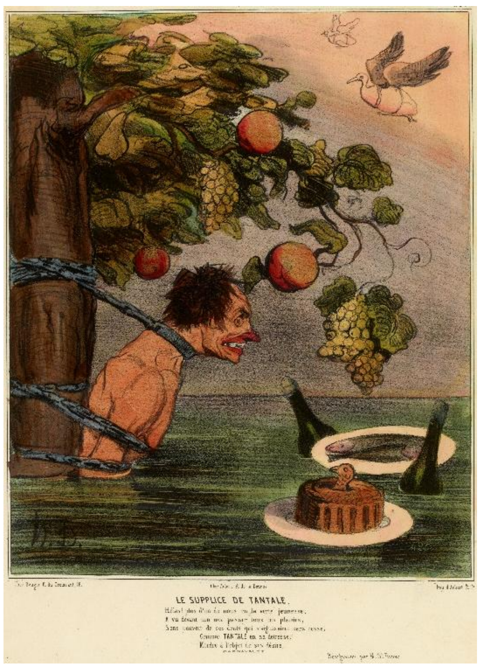
A vu devant son nez passer tous les plaisirs

Sans pouvoir de ses dents qui s'aiguisaient sans cesse

Comme Tantale en sa détresse

Mordre l'objet de ses désirs.

Sainte Beuve



Dessin : Honoré Daumier (1842)