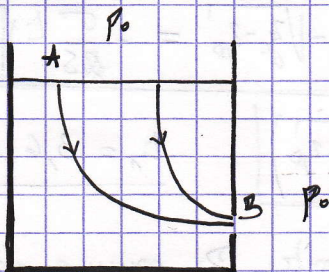


# ① Oscillateur à relaxation (CCP - PC - 2010)

1.1.



1.2. Théorème de Bernoulli.

Conditions d'application: ① écoulement stationnaire  
Réalise si la surface libre baisse "lentement",

② Écoulement incompressible  
Réalise car le fluide est incompressible

Relation de Bernoulli:  $p(z) + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{cte}$

le long d'une ligne de courant.

③ Référentiel du labo  
supposé galiléen.

④ Fluide parfait

⑤  $\vec{g}$  uniforme

Sur la ligne de courant reliant A et B:  $P_0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$

Conservation du débit volumique sortant de la surface de contrôle entourant le fluide eau à t:  $v_A S = v_B \sigma \Rightarrow v_A = v_B \frac{\sigma}{S}$

$$\text{d'où } v_B^2 \left(\frac{\sigma}{S}\right)^2 + 2gh = v_B^2 + 2gz_B \Rightarrow v_B = \frac{\sqrt{2g(h-z_B)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{S}\right)^2}}$$

$$1.3. \dot{h} = -v_A < 0 \rightarrow -v_A = -v_B \frac{\sigma}{S} \Rightarrow \dot{h} = - \frac{\sqrt{2g(h-z_B)}}{\sqrt{\left(\frac{S}{\sigma}\right)^2 - 1}}$$

Pour  $\frac{\sigma}{S} \ll 1$ :  $v_B \approx \sqrt{2g(h-z_B)}$ : formule de Torricelli.

$$\dot{h} \approx - \frac{\sigma}{S} \sqrt{2g(h-z_B)}$$

$$14. D_s = v_B \sigma = \sigma \sqrt{2g(h-z_B)}$$

$$\text{A.N: } D_s = 1,2 \text{ L.s}^{-1}$$

21. On applique cette fois le théorème de Bernoulli entre A (un point de la surface libre du D:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_D^2 + \rho g z_D ; v_A$$

De même la conservation du débit volumique du fluide incompressible

$$\text{donne } v_A S = v_D \sigma \text{ or } S \gg \sigma \Rightarrow v_A \ll v_D ; z_A = h.$$

$$\text{d'où } v_D = \sqrt{2g(h-z_D)} \Rightarrow D_s = v_D \sigma = \sigma \sqrt{2g(h-z_D)}$$

22.  $D_s$  est un débit volumique sortant le réservoir donc

$$\frac{dV_{\text{eau dans réservoir}}}{dt} = -D_s \Rightarrow S \frac{dh}{dt} = -\sigma \sqrt{2g(h-z_D)} \quad (E)$$

$$23. \text{Posons } x(t) = h - z_D ; \dot{h} = \dot{x} \Rightarrow (E): S \dot{x} = -\sigma \sqrt{2gx}$$

Séparons les variables:  $\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = - \int_0^t \frac{\sigma}{S} dt \rightarrow \frac{2}{2g} \left[ \sqrt{2gx} \right]_{x(0)}^{x(t)} = - \frac{\sigma}{S} t$

$$\frac{1}{g} \left( \sqrt{2gx(t)} - \sqrt{2gx(0)} \right) = - \frac{\sigma}{S} t \rightarrow \sqrt{h(t) - z_0} - \sqrt{z_c - z_0} = - \frac{\sigma}{S} t \sqrt{\frac{g}{2}}$$

AN:  $h(t_1) = z_B \rightarrow t_1 = \frac{2S}{\sigma \sqrt{g}} \left( \sqrt{z_c - z_0} - \sqrt{z_B - z_0} \right) \quad t_1 = 3,6 \cdot 10^2 s = 6,0 \text{ min}$

31. Dans le bilan de volume du 2.2., il faut ajouter  $D_i$  comme débit volumique entrant:

$$S \frac{dh}{dt} = D_i - \sigma \sqrt{2g(h - z_0)}$$

32. Solution stationnaire:  $\dot{h}(t) = 0 \Rightarrow D_i = \sigma \sqrt{2g(h_s - z_0)} \Rightarrow h_s = z_0 + \frac{D_i^2}{2g\sigma^2}$

AN:  $D_i(h_s = z_B) = 0,48 \text{ L s}^{-1} = D_{i,B}$

$D_i(h_s = z_c) = 0,63 \text{ L s}^{-1} = D_{i,c}$

$D_i < D_{i,B}$

Le réservoir se vide, malgré le siphon amorcé.  $h$  atteint  $z_0$ , le siphon se désamorce. Le réservoir se remplit jusqu'à  $z_c$ , le siphon s'amorce. Le réservoir se vide...  
RÉGIME OSCILLANT

$D_{i,B} \leq D_i < D_{i,c}$

Le réservoir se vide jusqu'à  $z_0 < h_s < z_c$ . Le niveau se stabilise.  
RÉGIME STATIONNAIRE

$D_i > D_{i,c}$

Le réservoir se remplit jusqu'à déborder.  
RÉGIME DIVERGENT

$D_c = D_{i,B}$

33. Siphon désamorcé donc  $D_s = 0$  D'où (E):  $S \frac{dh}{dt} = D_i$

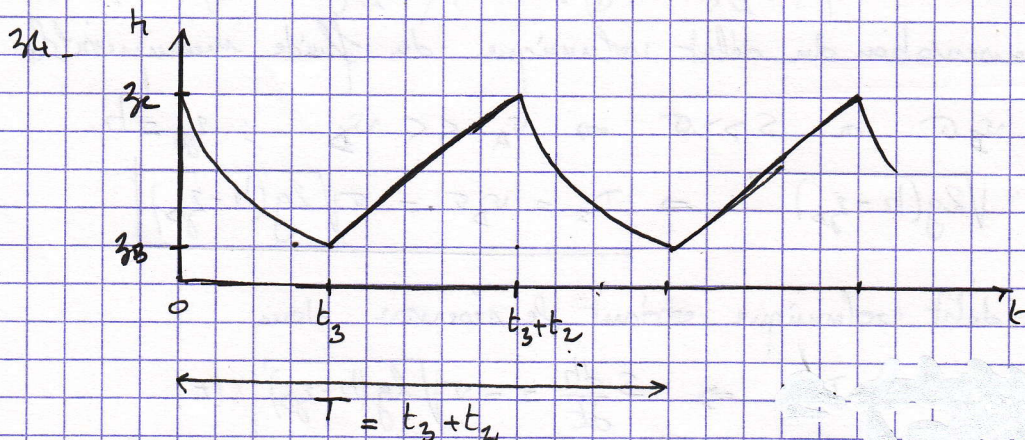
$h(t) = z_0 + \frac{D_i}{S} t$

$h(t_2) = z_c \rightarrow$

$t_2 = \frac{S}{D_i} (z_c - z_0)$

$t_2 = 5,0 \cdot 10^2 s$

$t_2 = 8 \text{ min } 20 s$



35.  $S \frac{dh}{dt} = D_i - \sigma \sqrt{2g(h-z_0)}$

$$u = D_i - \sigma \sqrt{2g(h-z_0)} \rightarrow du = - \frac{\sigma g}{\sqrt{2g(h-z_0)}} dh$$

$$\rightarrow dh = \frac{\sqrt{2g(h-z_0)}}{\sigma g} du = - \frac{D_i - u}{\sigma^2 g} du$$

$$\text{D'où } - \frac{S}{\sigma^2 g} (D_i - u) du = u dt \rightarrow \frac{D_i}{u} du - du = - \frac{\sigma^2 g}{S} dt$$

$$* \text{ à } t=0: u(0) = D_i - \sigma \sqrt{2g(z_c - z_0)}$$

$$* \text{ à } t=t_3: u(t_3) = D_i - \sigma \sqrt{2g(z_c - z_0)}$$

$$\text{On intègre: } \int_{u(0)}^{u(t_3)} \frac{D_i du}{u} - \int_{u(0)}^{u(t_3)} du = - \int_0^{t_3} \frac{\sigma^2 g}{S} dt$$

$$D_i \ln \left( \frac{u(t_3)}{u(0)} \right) - (u(t_3) - u(0)) = - \frac{\sigma^2 g}{S} t_3$$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{S}{\sigma^2 g} \left[ \sigma \sqrt{2g(z_c - z_0)} - \sigma \sqrt{2g(z_c - z_0)} - D_i \ln \left( \frac{D_i - \sigma \sqrt{2g(z_c - z_0)}}{D_i - \sigma \sqrt{2g(z_c - z_0)}} \right) \right]$$

A.N:  $u(t_3) = -85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}; u(0) = -2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

$$\rightarrow t_3 = 6,4 \cdot 10^2 \text{ s} = 10 \text{ min } 40 \text{ s} \rightarrow T = t_2 + t_3 = 19 \text{ min.}$$