



L'accent doit être mis sur la clarté et la précision de la rédaction, ainsi que sur le soin apporté aux calculs et à la présentation.

Miroir parabolique liquide

Présentation de l'étude.

Un récipient cylindrique (1) d'axe (Oz) , en communication avec l'air ambiant par son ouverture supérieure, est partiellement rempli par un liquide (considéré comme incompressible). Ce récipient peut tourner autour de son axe (Oz) . Le système constitué du récipient et du liquide est supposé présenter une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) . Nous notons $\mathcal{R}_0(O, x, y, z)$ le référentiel du laboratoire (0), que nous considérons comme étant galiléen, et $\mathcal{R}_1(O, r, \theta, z)$ le repère cylindrique tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r(\theta) + z\vec{e}_z$ où M est un point considéré du liquide.

Nous notons :

- R le rayon du cylindre ;
- H sa hauteur ;
- $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ sa vitesse angulaire ;
- m la masse du liquide ;
- ρ sa masse volumique ;
- h sa hauteur lorsque le récipient est immobile ;
- η sa viscosité dynamique
- Z_0 sa hauteur au centre de la cuve (c'est-à-dire en $r = 0$) ;
- $p(M)$ la pression en un point M du fluide ;
- p_0 la pression (supposée uniforme) de l'air atmosphérique surmontant le liquide ;
- $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.

La figure (1) représente le système étudié et précise quelques notations.

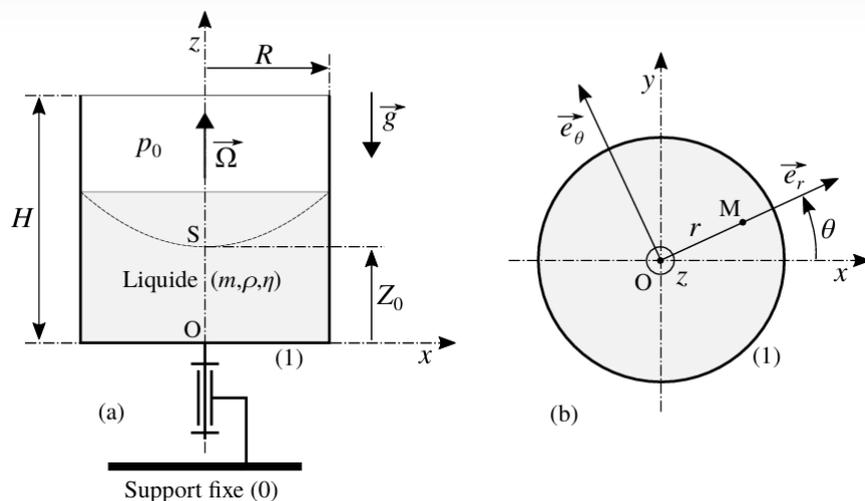


Figure 1– Cylindre (1) en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ par rapport au support fixe (0) lié au référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(O, x, y, z)$. Il contient le liquide (m, ρ, η) : (a) vue de côté (en coupe); (b) vue de dessus. Un point M du liquide est repéré dans le repère cylindrique $\mathcal{R}_1(O, r, \theta, z)$.

Nous conduisons cette étude dans le cadre suivant :

- La vitesse angulaire du cylindre est telle que, d'une part le liquide n'est pas éjecté hors du cylindre, d'autre part le fond de ce dernier reste immergé sur la totalité de sa surface (hypothèse référencée H_Ω).
- Nous ne prenons pas en compte l'énergie interfaciale du liquide.
- Nous négligeons tout échange d'énergie entre le liquide et l'air ambiant.

Notations, données et formulaire.

Pour les applications numériques nous adopterons les valeurs suivantes :

- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- Rayon du cylindre : $R = 4 \text{ cm}$
- Hauteur du cylindre : $H = 8 \text{ cm}$
- Hauteur de liquide (cylindre immobile) : $h = 4 \text{ cm}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Le vecteur gradient d'un champ scalaire $\psi(r, z)$ en coordonnées cylindriques est donné par la relation

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r(\theta) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z$$

A – Equation de la surface réfléchissante

Le cylindre tourne à vitesse angulaire constante, entraînant avec lui le liquide. Ce dernier est immobile par rapport au cylindre

1 – La figure 2 représente l'élément de volume $d^3\tau = dr \cdot r d\theta \cdot dz$ autour d'un point M du liquide, vu de dessus, c'est-à-dire selon $-\vec{e}_z$.

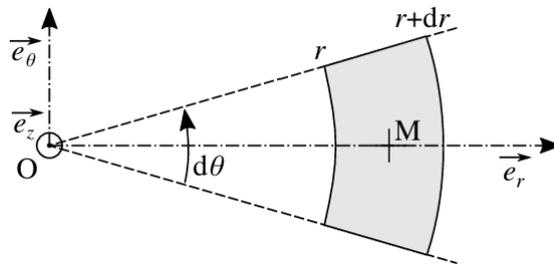


Figure 2

Reproduire cette figure et représenter par une flèche l'action de la pression (sous la forme \vec{p}) sur chacune des surfaces élémentaires délimitant le volume $d^3\tau$ (sans considérer celles de normales $\pm\vec{e}_z$). On précisera les arguments de chacune des pressions que l'on fera apparaître.

2 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément de volume $d^3\tau$, établir que le gradient de pression, en un point M du liquide, s'exprime selon la relation suivante :

$$\vec{\nabla}p(M) = \rho\vec{g} + \rho r\Omega^2\vec{e}_r(\theta)$$

On précisera la démarche suivie.

3 – Dédire du résultat précédent, l'expression de la pression $p(r, z)$. On notera A la constante d'intégration qui intervient.

4 – Nous décrivons la forme de la surface libre du liquide par la fonction $Z(r)$ ($r \in [0, R]$) où Z représente l'altitude d'un point de cette surface situé à la distance r de l'axe (Oz).

Déterminer cette fonction de la variable r en faisant intervenir les paramètres Ω , g et $Z_0 = Z(0)$.

5 - En raisonnant sur l'action mécanique que le liquide exerce sur le fond du récipient, établir que la fonction $Z(r)$ est définie par l'équation suivante :

$$Z(r) = h + k(2r^2 - R^2)$$

On exprimera la constante réelle positive k en fonction de g et Ω .

Représenter graphiquement la fonction $Q(s) = \frac{Z(r)-h}{R}$ en fonction de $s = \frac{r}{R}$. Indiquer les particularités de cette fonction.

6 - Nous nous plaçons dans le cas où $h = \frac{H}{2}$. Traduire l'hypothèse H_Ω (définie dans la présentation générale de l'étude) en une condition portant sur la vitesse angulaire Ω et faisant intervenir les paramètres g, R et H.

7 - Il apparaît que la constante k intervenant dans l'équation (3) ne dépend pas de la masse volumique ρ du liquide. Indiquer quelle en est la raison fondamentale.

8 – On dépose, sur la surface du liquide, un flotteur sphérique de rayon assez faible pour que nous puissions considérer que le gradient de pression reste sensiblement uniforme à son échelle. Adopte-t-il, sur la surface,

une position d'équilibre privilégiée ? Sa situation de flottaison est-elle modifiée par le fait que le liquide est en rotation ?

B – Application : télescope à miroir liquide

Un télescope à miroir liquide se présente comme le système étudié dans la section (A), la surface du liquide présentant la particularité d'être réfléchissante. Depuis l'année 2003, l'université de Colombie Britannique possède un tel télescope, appelé "Large Zenith Telescope (LZT)", situé près de Vancouver (Canada). Le diamètre de son miroir est de six mètres et le liquide utilisé est du mercure. Nous prenons ici l'origine des altitudes non plus au point O mais au point S (se reporter à la figure (1)). L'équation décrivant géométriquement la surface du liquide, issue de la relation (3), devient alors l'équation suivante :

$$W(r) = 2kr^2$$

9 - Un réflecteur parabolique présente une particularité : tous les rayons incidents selon la direction $-\vec{e}_z$ rencontrent son axe (Sz), après réflexion sur sa surface, en un même point F qui définit le foyer image. Exprimer, en fonction des paramètres g et Ω , la distance focale $f = \overline{SF}$ du télescope.

Indication : On choisira un point de réflexion $M(r, W(r))$ particulier pour lequel le calcul devient immédiat.

10 - Déterminer la valeur de la vitesse angulaire Ω du LZT, exprimée en tours par minute, dont la distance focale est de dix mètres.

11 - Une étoile E se situe dans l'axe de visée du télescope. Représenter, sur un schéma, la construction permettant d'obtenir son image E' formées par le télescope. Indiquer où doit être situé le détecteur CCD permettant de photographier cette image.

12 - Indiquer quel est l'intérêt d'utiliser un réflecteur parabolique, plutôt que sphérique, dans un télescope.

13 - Indiquer quels sont les intérêts d'utiliser un télescope de grand diamètre.

Un télescope à miroir liquide présente de nombreux avantages, par rapport aux télescopes classiques (fabrication plus simple, plus léger, moins fragile, moins onéreux). Il ne permet toutefois qu'une observation selon la verticale du lieu, à l'heure de la visée.

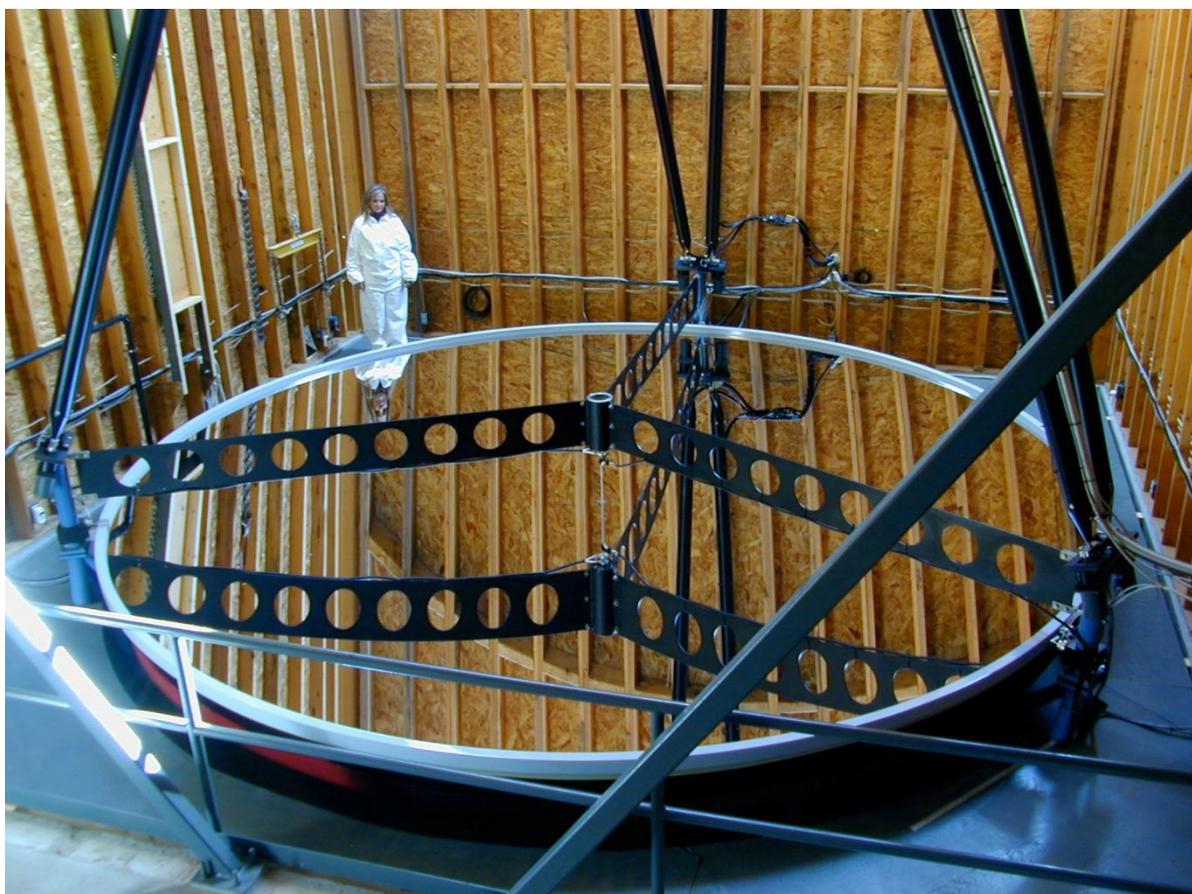


Figure 3 – Le miroir liquide (mercure) primaire du LZT de l'université de Colombie Britannique (Canada)