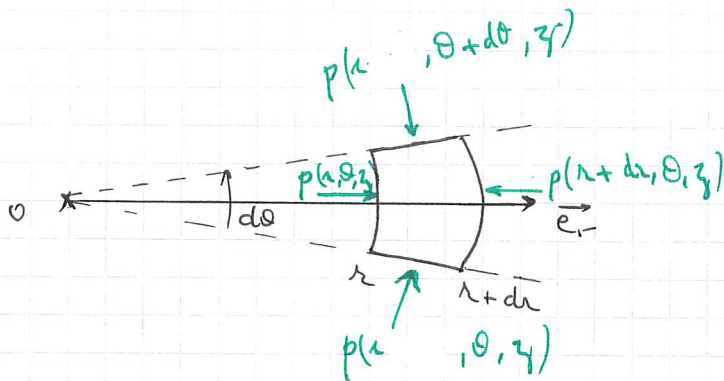


MIROIR PARABOLIQUE LIQUIDE

(ENS - Lyon - PL - 2022)

1-



2. x Référentiel : $\mathcal{R}_1$ en rotation uniforme dans $\mathcal{R}_0$, donc NON galiléen
- * Bilan des forces volumiques appliquées à $d\tau$, à l'équilibre dans $\mathcal{R}_1$
 - Poids volumique: $\rho \vec{g}$
 - Équivalent volumique des forces de pression: $-\text{grad } p$
 - Force d'inertie d'entraînement volumique: $+\rho \Omega^2 r \vec{e}_r$

* PFD dans $\mathcal{R}_1$, le fluide y étant à l'équilibre :

$$\vec{0} = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \rho \Omega^2 r \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \text{grad } p = \rho \vec{g} + \rho \Omega^2 r \vec{e}_r$$

3. En projetant selon $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{intégration: } p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + f(z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{df}{dz} = -\rho g \end{array}$$

Par intégration $f(z) = -\rho g z + A$

$$\Rightarrow \quad \underline{p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + A}$$

4. Condition limite portant sur la pression, continue, à la surface

$$p(r, Z(r)) = p_0 = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g Z(r) + A \quad \Rightarrow \quad Z(r) = \frac{A - p_0 + \rho \Omega^2 r^2 / 2}{\rho g}$$

$$\text{or } Z_0 = Z(0) = \frac{A - p_0}{\rho g} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z(r) = Z_0 + \frac{r^2 \Omega^2}{2g}}$$

5. Dans $\mathcal{R}_0$ galiléen, le centre de masse du liquide est immobile, donc la résultante des forces qu'il subit (poids, réaction de la paroi latérale, réaction du fond) est nulle.

+ force pressante atmosphérique.
Par invariance par révolution autour de Oz , la réaction de la paroi latérale est nulle.

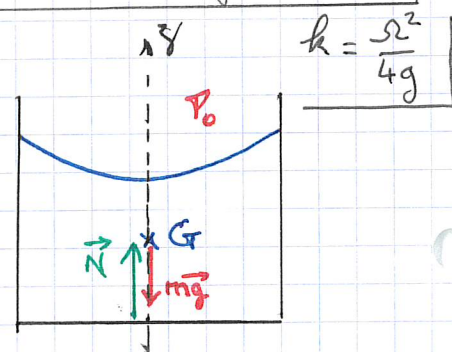
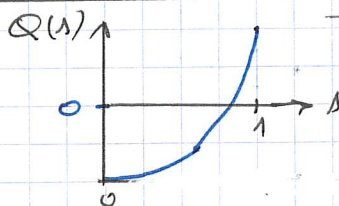
Donc, la résultante de forces de pression que le liquide exerce sur le fond est égale au poids total du liquide et à la force pressant atmosphérique

$$\|\vec{N}\| = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R p(r,0) r dr d\theta = mg + p_0 \pi R^2 \quad \text{où } m = \rho \pi R^2 h.$$

$$\|\vec{N}\| = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \left(\frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 + A \right) r dr d\theta = \pi \rho \frac{\Omega^2 R^4}{4} + A \pi R^2 = \rho \pi R^2 h g + p_0 \pi R^2$$

d'où $A - p_0 = \rho h g - \rho \frac{\Omega^2 R^2}{4} \Rightarrow Z(R) = h + \frac{\Omega^2}{4g} (2r^2 - R^2)$

$$Q(s) = \frac{\Omega^2 R^2}{4g} (2s^2 - 1)$$



6 - H₂: ① Le liquide n'est pas jeté
soit $Z(R) < H$

$$h + \frac{\Omega^2 R^2}{4g} < H \quad \text{ou } h = \frac{H}{2} \Rightarrow \Omega < \frac{\sqrt{2gH}}{R}$$

② Le fond reste immergé $\Rightarrow Z(0) > 0$ soit $h > \frac{\Omega^2 R^2}{4g}$

$$\Omega < \frac{\sqrt{2gH}}{R}$$

7. Toutes les forces volumiques en jeu sont proportionnelles à la masse de la particule de fluide

- masse grave pour le poids
- masse inertielle pour la force d'inertie d'entraînement

l'identification au niveau fondamentale de ces deux masses rend le profil de la surface indépendante de la masse volumique du fluide.

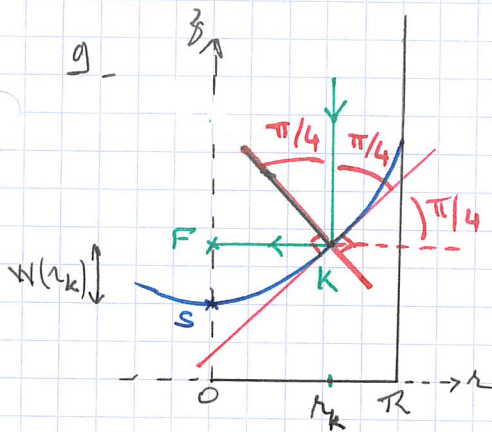
8 - Dans R₁, le flotteur de volume V et de masse volumique ρ' subit

$$\vec{F} = \rho' V (\vec{g} + \Omega^2 r \vec{e}_r) = \rho' V \vec{g}_{\text{rad}} \left(-g\vec{z} + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \right)$$

et la résultante des forces de pression du liquide (théorème d'Archimède)

$$\vec{\Pi} = -V_{\text{immergé}} \vec{g}_{\text{rad}} \rho = -V_{\text{im}} (\rho \vec{g} + \rho \Omega^2 r \vec{e}_r) = -\rho V_{\text{im}} (\vec{g} + \Omega^2 r \vec{e}_r)$$

À l'équilibre $\vec{F} + \vec{\Pi} = \vec{0} \Rightarrow \rho' V = \rho V_{\text{im}}$ quelle que soit la position du flotteur.



En particulier, au point K, le rayon incident fait un angle $\pi/4$ avec la normale et donc avec la tangente à la surface.

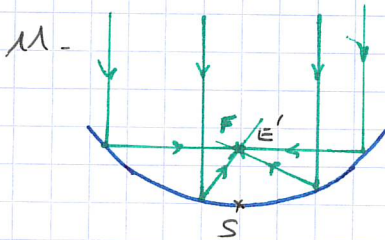
Ainsi $\tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{dW(r)}{dr} = 4kr_k$

$$r_k = \frac{1}{4k} = \frac{g}{\Omega^2}$$

Il est alors réfléchi horizontalement, d'où

$$SF = W(r_k) = 2k \left(\frac{1}{4k} \right)^2 = \frac{1}{8k} \Rightarrow \underline{f = \frac{g}{2\Omega^2}}$$

10. $\Omega = \sqrt{\frac{g}{2f}} \Rightarrow \underline{\Omega = 0,71 \text{ rad s}^{-1} = 6,8 \text{ tr. min}^{-1}}$



Les rayons zénithaux émis par E convergent au foyer F, image E' de E.

C'est là que se place le capteur CCD.

12. Le réflecteur parabolique est rigoureusement stigmatique pour un point objet sur l'axe optique. C'est un avantage sur le réflecteur sphérique qui n'est stigmatique que de façon approchée dans les conditions de Gauss.

13. Grand diamètre : * L'énergie lumineuse captée étant proportionnelle à la section πR^2 du miroir, cela permet la détection d'objets plus faibles émetteurs.
* La diffraction est réduite. Le diamètre de la tâche d'Airy est inversement proportionnelle au diamètre du miroir.

