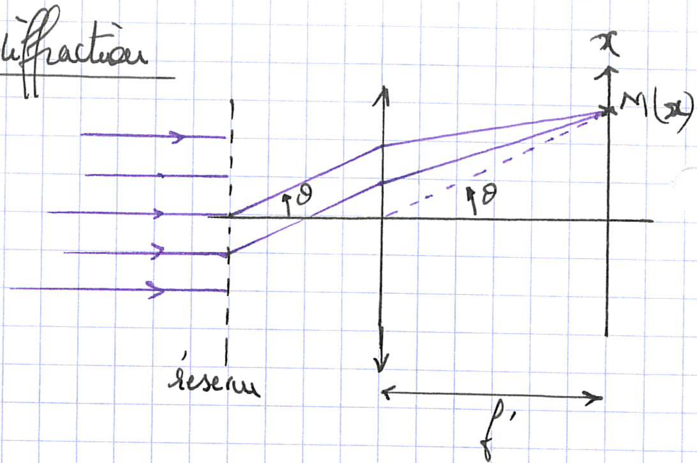
OP4.16 - Spectromètre par réseau de diffraction



1. $\delta = a\sin\theta = p\lambda \quad p \in \mathbb{Z}$

$\tan\theta = \dfrac{x}{f'}$

2. Approximations des petits angles :

$\tan\theta \simeq \theta = \dfrac{x}{f'}$; $\sin\theta \simeq \theta$

$\rightarrow \boxed{a\dfrac{x}{f'} = p\lambda}$

Spectromètre : dans un ordre p fixé, la mesure de x pour un maximum d'intensité constitue une mesure de λ.

3. $\boxed{a = p\dfrac{\lambda f'}{x_1}}$ $\quad \underset{(\mu m)}{a} = 0,6328 \cdot \dfrac{300}{19} \longrightarrow \underline{a = 10,0\ \mu m}$.

$\boxed{N_L = \dfrac{1}{a}}$ $\quad \underline{N_L = 100\ mm^{-1}}$

4. $\boxed{\lambda_2 = \dfrac{a}{f'}x_2 = \lambda_1\dfrac{x_2}{x_1}}$ $\quad \underline{\lambda_2 = 533\ nm}$.

5. $a\sin\left(\arctan\dfrac{x}{f'}\right) = p\lambda$

* $a = p\dfrac{\lambda_1}{\sin\left(\arctan\frac{x_1}{f'}\right)} = 10,0\ \mu m$.

* $\lambda_2 = a\sin\left(\arctan\dfrac{x_2}{f'}\right) = 0,633$

Avec 3 c.s., l'approx. des petits angles est donc justifiée.

6. * Plus N est grand plus les raies du spectre sont fines ce qui accroît la précision de leur repérage.
* Le pouvoir de résolution des fentes d'Young est mauvais pour les utiliser en spectroscopie.

7. $\varphi = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda} = \dfrac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta \qquad d\varphi = \dfrac{2\pi a}{\lambda}\cos\theta\, d\theta$

. Pour N grand $\Delta\varphi_{1/2} = \dfrac{2\pi}{N} << 1$ rad. $\longrightarrow \Delta\varphi_{1/2} \simeq \dfrac{2\pi}{\lambda}a\cos\theta \cdot \Delta\theta$

. $d(\tan\theta) = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \dfrac{dx}{f'}$

$\rightarrow \Delta\varphi_{1/2} = \dfrac{2\pi a}{\lambda}\cdot\dfrac{\Delta x}{f'\cos\theta} \qquad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(p\frac{\lambda}{a}\right)^2} \simeq 1$ pour $p = 1$

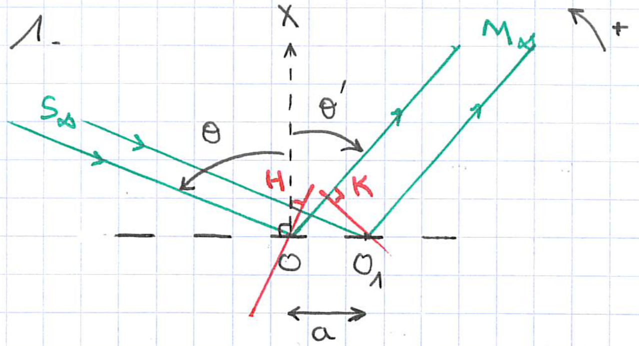
$\Rightarrow \dfrac{2\pi a\,\Delta x}{\lambda f'} = \dfrac{2\pi}{N} \longrightarrow \Delta x = \dfrac{\lambda f'}{a}\cdot\dfrac{1}{N} = x\dfrac{1}{N}$

$\boxed{\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{1}{N}}$

On obtiendra des raies d'autant plus fines sur l'écran que le nombre de traits éclairés du réseau est élevé.

OP412. Monochromateur à réseau

1.



Chaque trait réfléchissant diffracte la lumière.

$$\delta = (SO_1M) - (SOM)$$
$$= (SH)+(HO_1)+(O_1M)-(SO)-(OK)-(KM)$$

* H et O appartiennent au même plan d'onde $\Rightarrow (SH) = (SO)$
* Après retour inverse de la lumière, K et O_1 appartiennent au même plan d'onde $\Rightarrow (KM) = (O_1M)$

$\Rightarrow \underline{\delta = (HO_1) - (OK)}$ où $(HO_1) = a\sin\theta$

$(OK) = -a\sin\theta' > 0$ ($\triangle$: $\theta' < 0$)

$\Rightarrow \underline{\delta = a(\sin\theta + \sin\theta')}$

La formule du réseau donne les directions θ'_p d'interférences constructives $\Rightarrow \delta = p\lambda \quad p \in \mathbb{Z}$

D'où $\quad a(\sin\theta + \sin\theta'_p) = p\lambda$

Avec les notations de l'énoncé : $\theta = \beta - \alpha \; ; \; \theta' = \beta' - \alpha$.

$\Rightarrow \underline{a\left(\sin(\beta-\alpha) + \sin(\beta'_p - \alpha)\right) = p\lambda}$

2. $\alpha = 0 \; ; \; \beta' = 0 \; ; \; |p| = 2 \Rightarrow a\sin\beta = -2\lambda_0 \quad$ ($\triangle$ $\beta < 0$)

$\underline{\beta = -\arcsin\left(\frac{2\lambda_0}{a}\right)}$ $\quad \beta = -0{,}644$ rad $= -36° \, 52'$

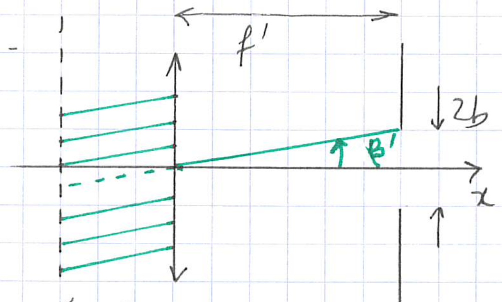
3. $\beta' = 0 \; ; \; p = -2 \; ; \; \lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max} \; ; \; \beta = \text{cte}$.

$\Rightarrow \underline{\sin(\beta - \alpha) - \sin\alpha = -2\frac{\lambda}{a}}$ $\quad$ Numériquement : $\alpha_{min} = -0{,}109$ rad pour λ_{min}

$\alpha_{max} = -1{,}14$ rad pour λ_{max}

$\underline{-1{,}14 < \alpha < -0{,}109 \text{ rad}}$.

4.



$\alpha = 0$

$\beta' \simeq \frac{b}{f'} \ll 1$

$\beta' - \alpha = \beta' \rightarrow \sin\beta + \sin\beta' = -2\frac{\lambda}{a}$

Or $\beta' \ll 1$ $\quad \sin\beta = -2\frac{\lambda_0}{a}$ $\Rightarrow \beta' = -\frac{2}{a}(\lambda - \lambda_0)$

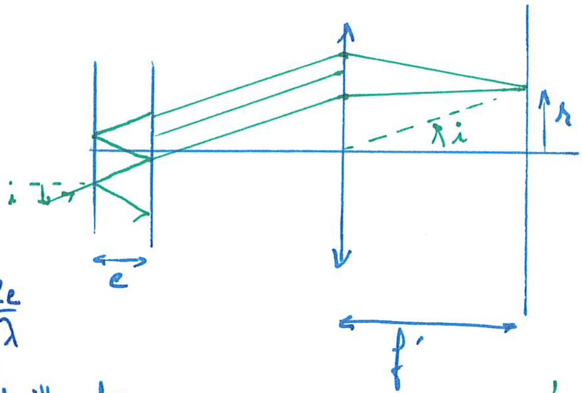
D'où $\quad \underline{\Delta\lambda = \left|-\frac{a}{2}\Delta\beta'\right|}$ où $\Delta\beta' = \frac{2b}{f'}$

$\Rightarrow \underline{\Delta\lambda = 0{,}02 \ \mu m = 20 \text{ nm}}$

OP422 - Résolution du doublet jaune de l'He

$\delta = 2e\cos i \simeq 2e\left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$

$\tan i \simeq i = \frac{r}{f'}$

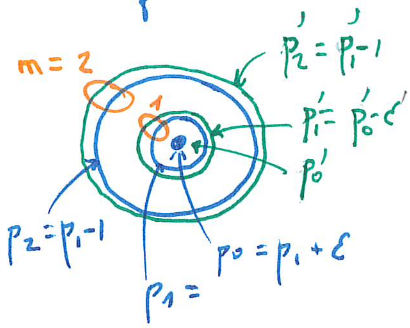


$\Rightarrow \delta = 2e\left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right)$

$p(r) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right) = p_0 - \frac{e}{\lambda}\frac{r^2}{f'^2}$ où $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$

$p(0) = p_0 = p_1 + \varepsilon$; $p_{m\neq 0}$: ordre des anneaux brillants ($p_{m\neq 0} \in \mathbb{N}$)

N° anneau brillant : $m = \underbrace{p_0 - \varepsilon}_{p_1} - p_m + 1$



$$m = \frac{e}{\lambda}\frac{r_m^2}{f'^2} - \varepsilon + 1$$

$$\boxed{r_m = f'\sqrt{\frac{\lambda}{e}}\cdot\sqrt{m + \varepsilon - 1}}$$

De même pour la 2e raie du doublet : $\boxed{r'_m = f'\sqrt{\frac{\lambda'}{e}}\cdot\sqrt{m + \varepsilon' - 1}}$

× Série $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}+1}$; $\sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}+2}$ $\Rightarrow$

$\varepsilon = 2/3$

$m =$ 1 2 3

× Série $\sqrt{1}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$

$\varepsilon' \simeq 1$

$m' =$ 1 2 3

Pour $p_m = p'_m$ (plus petit écart de longueur d'onde) et $r = 0$

$\hookrightarrow |p_0 - p'_0| = 2e\left|\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right|$

soit $|(p_1 + \varepsilon) - (p'_1 + \varepsilon')| \simeq 2e\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ avec $p_1 = p'_1$ pour obtenir le + petit $\Delta\lambda$

$\Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2e}|\varepsilon - \varepsilon'|}$ $\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{6e}}$ $\underline{\Delta\lambda = 1{,}8\ 10^{-2}\ \text{nm}}$