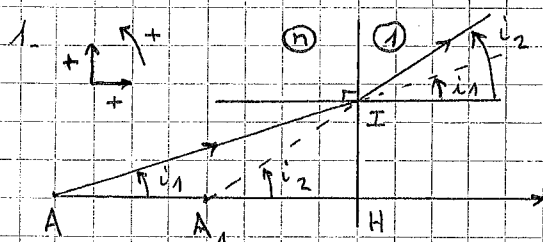


Capteur d'empreintes digitales par réflexion totale frustrée (Centrale Supélec - XP - 2019)



* Géométriquement : $\overline{HI} = \overline{AH} \tan i_1 = \overline{AH} \tan i_2$

* Loi de la réfraction : $n \sin i_1 = n' \sin i_2$

Dans les conditions de Gauss ($i_{1,2} \ll 1 \text{ rad}$)

$\tan i_1 \approx \sin i_1$; $\tan i_2 \approx \sin i_2$.

$$\text{Donc } \overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}$$

$$2. * p = \overline{OA_1} = \overline{OA'} + \overline{A'A_1} = p' - D_1 \text{ or } p' = \delta p \Rightarrow p = - \frac{D_1}{1-\delta}$$

$$\text{Donc } p' = \delta p = - \frac{\delta D_1}{1-\delta}$$

* On injecte ces expressions dans la relation de conjugaison de Descartes

$$\frac{\delta-1}{\delta D_1} - \frac{\delta-1}{D_1} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = -D_1 \frac{\delta}{(\delta-1)^2}$$

$$3. \frac{D_1}{f'} = - \frac{(\delta-1)^2}{\gamma} = -\delta + 2 - \frac{1}{\gamma} = g(\gamma)$$

$$\frac{d g(\gamma)}{d \gamma} = -1 + \frac{1}{\gamma^2} = 0 \text{ si } \gamma = \pm 1 \text{ on choisit } \gamma = -1 \text{ selon l'énoncé}$$

$$\frac{d^2 g(\gamma)}{d \gamma^2} = -\frac{2}{\gamma^3} > 0 \text{ donc } g(\gamma) \text{ admet bien un MINIMUM pour } \gamma = -1$$

$$g(-1) = 4$$

$$\text{Donc } \frac{D_1}{f'} \geq 4 \Rightarrow f' \leq \frac{D_1}{4}$$

$$4. * D_1 = \overline{A'A_1} = \overline{A'A} + \overline{AA_1} = \overline{A'H} + \overline{HA} + D = \frac{L}{n} - L + D = D_1$$

$$\hookrightarrow D_1 = 90 \text{ cm}$$

$$* p' = 6,0 \text{ cm} ; f' = 2,0 \text{ cm}$$

$$5. \text{D'après 3) : } d\left(\frac{D_1}{f'}\right) = - \frac{D_1}{f'^2} df' = \left(-1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma \Rightarrow \frac{d\gamma}{df'} = - \frac{D_1}{f'^2} \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}$$

$$\text{Or } \gamma < 0 \Rightarrow \gamma = -|\gamma| \Rightarrow \frac{d|\gamma|}{df'} = \frac{D_1}{f'^2} \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}$$

Pour $|\gamma| > 1$, $\frac{d|\gamma|}{df'} < 0$ donc il faut diminuer f' pour maximiser $|\gamma|$
ce qui finira par gêner la bonne application des CONDITIONS DE GAUSS.

6. Pour distinguer deux vâtes successives de l'empreinte sur le capteur CCD il faut $|Y|a > l_c \Rightarrow a > \frac{l_c}{|Y|}$ soit $l_c < 200 \mu m$.

7. * Dans le triangle noisé en M'_2 formé par les rayons après la lentille (cf figure 6), le théorème de Thalès donne

$$\frac{\phi}{d} = \frac{e'}{p' - e'} = \frac{e'}{\gamma p - e'} = \frac{1}{\frac{\gamma p}{e'} - 1}$$

* Comme $e \ll |p|$ et $e' \ll p'$, différencions la relation de conjugaison :

$$-\frac{dp'}{p'^2} + \frac{dp}{p^2} = 0 \text{ et identifions } dp' = -e' \text{ et } dp = -e \Rightarrow e' = e \frac{p'^2}{p^2} \text{ soit } e' = e \gamma^2$$

que l'on injecte dans l'expression de $\frac{\phi}{d}$:

$$\frac{\phi}{d} = \frac{1}{\frac{\gamma}{e} - 1} \text{ or pour } e \ll |p|, \frac{\phi}{d} \approx \frac{e\gamma}{p} \Rightarrow \phi \approx \gamma d \frac{e}{p}$$

8. On souhaite $|\phi| > |Y|a$ soit $\frac{\gamma d e}{|p|} > |Y|a \Rightarrow d > a \frac{|p|}{e}$

9. Calculons l'angle de réfraction limite $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$

$i_{\text{lim}} = 42^\circ$ or les rayons provenant des LED frappent le dioptre sur lequel on pose les doigts sous un angle $\frac{\pi}{4} > i_{\text{lim}}$. Selon l'optique géométrique, les doigts ne sont donc pas éclairés.

