Physique

DEVOIR MAISON n°3

pour le mercredi 2 octobre 2024

Fénelon Sainte-Marie La Plaine Monceau GROUPE SCOLAIRE

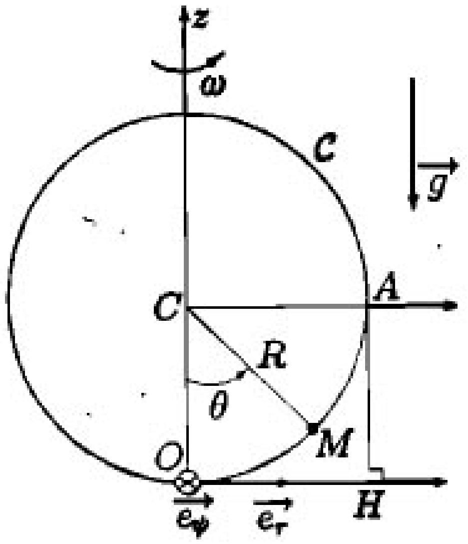
PC/PC*

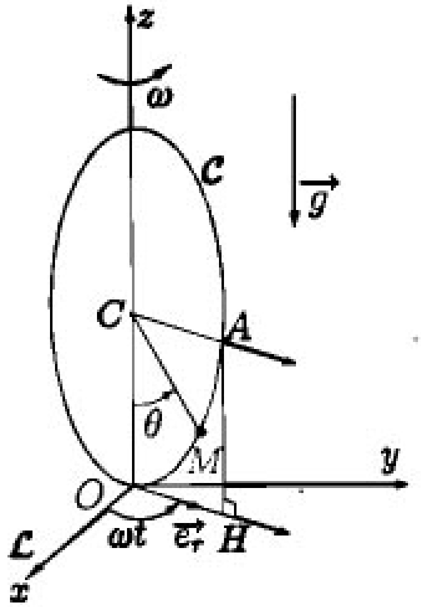
2024-2025

L'accent doit être mis sur la clarté et la précision de la rédaction, ainsi que sur le soin apporté aux calculs et à la présentation.
N'oubliez pas d'indiquer sur la copie le nom de la personne relectrice (code **R**) ou coautrice (code **A**).

Exemple de bifurcation mécanique

On envisage un point matériel de masse m, guidé sur un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R sur lequel il est mobile **sans frottement**.





Le cercle est maintenu en rotation à vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, supposé galiléen auquel est lié O et la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g.\vec{e_z}$. On appellera $\mathcal{R}'$ le référentiel auxiliaire lié au cercle, auquel est lié O et la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\psi}, \vec{e_z})$

1 - C étant le centre du cercle de guidage, on note $\theta = \left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CM}\right)$.

1.1 - Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CM}$ sur la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\psi}, \vec{e_z})$ puis sur la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

1.2 - On introduit la base locale en M des coordonnées polaires de centre C dans le plan du cercle $\mathcal{C}$ de la façon suivante : $\vec{e_\rho}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{CM}$ et de même sens que $\overrightarrow{CM}$; $\vec{e_\theta}$ est le vecteur unitaire du plan tel que $(\vec{e_\rho}; \vec{e_\theta}) = \frac{\pi}{2}$; enfin, $\vec{n}$ complète la base de telle sorte que $(\vec{e_\rho}; \vec{e_\theta}; \vec{n})$ constitue une base orthonormée directe.

Représenter ces vecteurs, ainsi que ceux de la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\psi}, \vec{e_z})$ sur un schéma clair et indiquer les expressions des vecteurs $\vec{e_r}, \vec{e_\psi}$ et $\vec{e_z}$ sur la base $(\vec{e_\rho}; \vec{e_\theta}; \vec{n})$

2 - Exprimer la vitesse et l'accélération de M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ dans la base $(\vec{e_\rho}; \vec{e_\theta}; \vec{n})$.

3 - Montrer que l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} = \Phi(\theta) \qquad (*) \qquad \text{avec} \qquad \Phi(\theta) = \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right)\sin\theta$$

4 – 4.1 - On appellera position d'équilibre dans $\mathcal{R}'$ une position θ_e telle que $\Phi(\theta_e) = 0$; Justifier cette définition.

4.2 - L'équation différentielle (*) n'étant pas linéaire, on étudiera les petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre.

On rappelle que le développement limité au premier ordre en $(\theta - \theta_e)$ de la fonction $\Phi(\theta)$ en donne une expression approchée au voisinage de θ_e :

$$\Phi(\theta) \approx \Phi(\theta_e) + (\theta - \theta_e).\frac{d\Phi}{d\theta}(\theta_e)$$

Mettre l'équation différentielle (*) sous la forme approchée (**) au voisinage de θ_e :

$$\ddot{\theta} = (\theta - \theta_e).\Phi'(\theta_e) \qquad (**)$$

Quelle est la condition sur la dérivée $\Phi'(\theta_e)$ de Φ au point θ_e pour que l'équilibre soit stable ?

5 – 5.1 - La position $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre ? Si oui, l'équilibre est-il stable ?

5.2 - Montrer qu'il existe une valeur critique positive ω_c de la vitesse angulaire de rotation pour laquelle le nombre de positions d'équilibre change.

5.3 - Récapituler dans un tableau les positions d'équilibre et leur stabilité :

- lorsque $|\omega| < \omega_c$
- lorsque $|\omega| > \omega_c$

5.4 - Pour chaque position d'équilibre stable rencontrée, déterminer la période des petites oscillations au voisinage de cette position d'équilibre.

5.5 - Représenter l'allure de la courbe représentant la valeur (ou les valeurs) de θ_e correspondant à un équilibre stable en fonction de ω.

Commenter cette représentation graphique à la lumière du titre de ce problème.

6 – 6.1 - Exprimer les énergies cinétiques E_c du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ et E_c' du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$.

6.2 – Donner en fonction de θ l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(M)$ du point M.

6.3 - Exprimer la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}}$ en M dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

puis l'énergie potentielle E_{pie} dont elle dérive.

6.4 – Ecrire l'expression de l'énergie mécanique E_M dans le référentiel $\mathcal{R}$ puis E_M' celle de l'énergie mécanique dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

6.5 - Y a-t-il conservation de l'énergie mécanique, telle qu'elle a été définie précédemment :

- dans le référentiel $\mathcal{R}$
- dans le référentiel $\mathcal{R}'$

Interpréter.