Exemple de bifurcation mécanique (Concours National DEUG 1997)

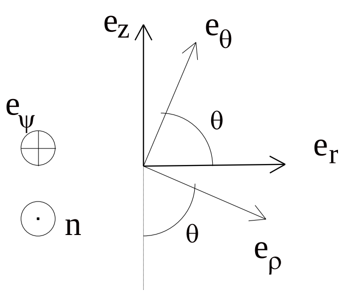
1.1 - $\boxed{\overrightarrow{CM} = R.\sin\theta\,.\overrightarrow{e_r} - R.\cos\theta\,.\overrightarrow{e_z}}$

$\overrightarrow{e_r} = \cos(\omega.t)\,.\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega.t)\,.\overrightarrow{e_y}$

→ $\boxed{\overrightarrow{CM} = R.\sin\theta\,.\cos(\omega.t)\,\overrightarrow{e_x} + R.\sin\theta\,.\sin(\omega.t)\,.\overrightarrow{e_y} - R.\cos\theta\,.\overrightarrow{e_z}}$

1.2 –

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,.\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\,.\overrightarrow{e_\rho}$$
$$\overrightarrow{e_\psi} = -\,\overrightarrow{n}$$
$$\overrightarrow{e_z} = -\cos\theta\,.\overrightarrow{e_\rho} + \sin\theta\,.\overrightarrow{e_\theta}$$



2 - * Vitesse absolue

Loi de composition des vitesses : $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_R(M)} = \overrightarrow{v_{R'}(M)} + \overrightarrow{v_e} = R.\dot\theta.\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

→ $\boxed{\overrightarrow{v_a} = R.\dot\theta.\overrightarrow{e_\theta} - \omega.R.\sin\theta\,.\overrightarrow{n}}$

* Accélération absolue

Loi de composition des accélérations : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$

$\overrightarrow{a_r} = -R.\dot\theta^2.\overrightarrow{e_\rho} + R.\ddot\theta.\overrightarrow{e_\theta}$ car le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ est circulaire.

$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\omega^2.R.\sin\theta\,.\overrightarrow{e_r} = -\omega^2.R.\sin\theta\,.\cos\theta\,.\overrightarrow{e_\theta} - \omega^2.R.\sin^2\theta\,.\overrightarrow{e_\rho}$

$$\overrightarrow{a_c} = 2.\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = -2.\omega.R.\dot\theta.\cos\theta\,.\overrightarrow{n}$$

3 – Ecrivons l'équation du mouvement orthoradial à partir de la projection du P.F.D. dans $\mathcal{R}$ appliqué à M.

Bilan des « vraies forces » dans $\mathcal{R}$:

* poids : $\overrightarrow{P} = m.\overrightarrow{g} = -m.g.\overrightarrow{e_z} = m.g.\cos\theta\,.\overrightarrow{e_\rho} - m.g.\sin\theta\,.\overrightarrow{e_\theta}$
* réaction du cercle sur M : $\overrightarrow{R} = R_{\rho.}\,\overrightarrow{e_\rho} + R_n.\,\overrightarrow{n}$

P.F.D. : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = m.\overrightarrow{a_a}$ dont on ne garde que la projection selon $\overrightarrow{e_\theta}$:

$-m.g.\sin\theta = m.R.\ddot\theta - m.\omega^2.R.\sin\theta\,.\cos\theta$

→ $\ddot\theta = \sin\theta\,.\left(\omega^2.\cos\theta - \frac{g}{R}\right)$

d'où $\boxed{\Phi(\theta) = \sin\theta\,.\left(\omega^2.\cos\theta - \frac{g}{R}\right)}$

4.1 – Lorsque M se trouve en une position d'équilibre (ici dans $\mathcal{R}'$ donc relatif), il est immobile dans $\mathcal{R}'$ donc $\ddot\theta = 0$ soit $\Phi(\theta_e) = 0$.

4.2 – Avec ce qui précède, on remplace directement $\Phi(\theta)$ par son expression approchée

→ $\Phi(\theta) \approx (\theta - \theta_e).\,\Phi'(\theta_e)$

L'équation différentielle peut se mettre sous la forme : $\ddot\theta - \theta.\,\Phi'(\theta_e) = -\theta_e.\,\Phi'(\theta_e)$

Elle admet des solutions bornées **d'oscillateur harmonique si $\boldsymbol{\Phi'(\theta_e) < 0}$**.

5.1 – La position θ = 0 est une position d'équilibre.

On calcule : $\Phi'(\theta_e) = \cos\theta_e\,.\left(\omega^2.\cos\theta_e - \frac{g}{R}\right) - \omega^2.\sin^2\theta_e$

$\Phi'(0) < 0$ si $\omega < \omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$ → θ = 0 position d'équilibre stable

$\Phi'(0) > 0$ si $\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$ → θ = 0 position d'équilibre instable

5.2 - $\Phi(\theta_e) = 0$ si θ = 0 ∀ ω
si θ = π ∀ ω
si $\cos\theta = \frac{\omega_c^2}{\omega^2}$ existant pour $\omega > \omega_C$.

5.3 –

	STABLE	INSTABLE
$\lvert\omega\rvert < \omega_C$	0	π
$\lvert\omega\rvert > \omega_C$	$\pm\arccos\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$	0 ; π

On n'est pas obligé de déterminer le signe de la dérivée $\Phi'(\theta_e)$ dans chaque cas. En pensant à la fonction énergie potentielle dans $\mathcal{R}'$, gardons simplement présent à l'esprit qu'une fonction admettant deux ou trois extremums locaux admet forcément une alternance de minimums et de maximums. Donc

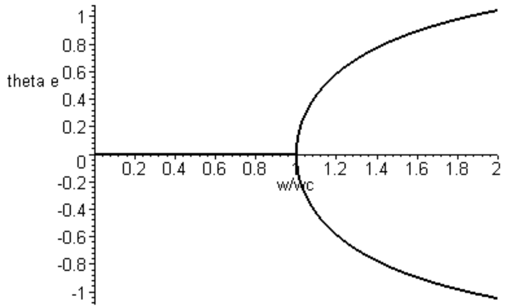
* $\omega < \omega_C$ on a identifié la position θ = 0 comme stable. La seconde θ = π est donc instable.
* $\omega > \omega_C$ on a identifié la position θ = 0 comme instable. La deuxième $\theta = \arccos\frac{\omega_c^2}{\omega^2}$ est donc stable puis la suivante θ = π est instable.

5.4 – La pulsation Ω des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable est extraite de l'équation différentielle : $\Omega = \sqrt{-\Phi'(\theta_e)}$ dont la période se déduit

$$T = \frac{2.\pi}{\Omega} = \frac{2.\pi}{\sqrt{-\Phi'(\theta_e)}}$$

* pour θ = 0 : $T = \frac{2.\pi}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$
* pour $\theta = \pm\arccos\frac{\omega_c^2}{\omega^2}$: $T = \frac{2.\pi.\omega}{\sqrt{\omega^4 - \omega_c^4}}$

5.5 – On note ici la **bifurcation**.



6.1 - $E_c = \frac{1}{2}.m.v_a^2 = \frac{1}{2}.m.R^2\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2.sin^2\,\theta\right)$

$E_c' = \frac{1}{2}.m.v_r^2 = \frac{1}{2}.m.R^2.\dot{\theta}^2$

6.2 - $E_p = -m.g.z + cte = -m.g.R.cos\,\theta + cte$

6.3 - $\overrightarrow{F_{ie}} = -m.\overrightarrow{a_e} = m.\omega^2.R.sin\,\theta.\left(cos\,\theta.\overrightarrow{e_\theta} + sin\,\theta.\overrightarrow{e_\rho}\right) = m.\omega^2.R.sin\,\theta.\overrightarrow{e_r}$

$$\boxed{E_{pie} = -\frac{1}{2}.m.\omega^2.R^2.sin^2\,\theta + cte'}$$

6.4 – $E_M = E_C + E_p$

$E_M' = E_c' + E_p + E_{pie}$

6.5 - * L'énergie mécanique ne se conserve pas dans $\mathcal{R}$ car la réaction $\overrightarrow{R}$, force non conservative y travaille. C'est une force motrice met en mouvement de rotation M autour de l'axe (*Oz*).

On montre en effet que $\boxed{\frac{dE_M}{dt} = 2.m.R^2.\dot{\theta}.\omega^2.cos\,\theta.sin\,\theta = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{v_a}}$

* L'énergie mécanique se conserve dans $\mathcal{R}'$ car $\overrightarrow{R}$ n'y travaille pas et $\overrightarrow{F_{ic}}$ non plus, seules forces non-conservatives.

$$\overrightarrow{L_S(C)} = m.\overrightarrow{SC} \wedge \overrightarrow{v} = m.d\,\overrightarrow{u_z}\,\overrightarrow{u_z}\,min_{max}max_{min}$$